



TESIS - SM 142501

**PENGARUH ALIRAN FLUIDA VISKOELASTIK YANG  
MELEWATI SILINDER ELIPTIK**

ANNISA DWI SULISTYANINGTYAS  
NRP 1213 2010 53

Dosen Pembimbing:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2015



THESIS - SM 142501

**EFFECT OF VISCOELASTIC FLUID FLOW PAST AN  
ELLIPTIC CYLINDER**

ANNISA DWI SULISTYANINGTYAS  
NRP 1213 2010 53

Supervisors:

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.

Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

MASTER'S DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2015



**PENGARUH ALIRAN FLUIDA VISKOELASTIK YANG MELEWATI  
SILINDER ELIPTIK**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat mendapatkan gelar  
Magister Sains (M.Si.)

di

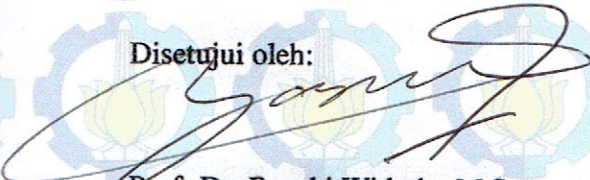
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh


**ANNISA DWI SULISTYANINGTYAS**  
NRP 1213201053

Tanggal Ujian : 20 Mei 2015  
Periode Wisuda : September 2015


Disetujui oleh:

  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP 19650605 198903 1 002

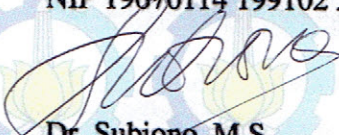
(Pembimbing I)

  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.  
NIP 19611115 198703 1 003

(Pembimbing II)


  
Dr. Dra. Mardijah, M.T.  
NIP 19670114 199102 2 001

(Penguji)

  
Dr. Subiono, M.S.  
NIP 19570411 198403 1 001

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana

  
Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.  
NIP 19640405 199002 1 001



# **PENGARUH ALIRAN FLUIDA VISKOELASTIK YANG MELEWATI SILINDER ELIPTIK**

Nama Mahasiswa : Annisa Dwi Sulistyaningtyas  
NRP : 1213 2010 53  
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

## **ABSTRAK**

Konveksi merupakan perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida. Solusi analitik pada persamaan konveksi dikembangkan dari kenonlinieran Navier-Stokes yang selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan persamaan teori lapisan batas. Penelitian ini menjelaskan tentang aliran *steady* pada lapisan batas dan perpindahan panas dari fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik. Persamaan pembangun dibangun dari persamaan kontinuitas, momentum, dan energi. Persamaan dimensional yang diperoleh kemudian ditransformasikan ke bentuk non-dimensional dan dikelompokkan ke dalam persamaan similaritas untuk mengetahui karakteristik aliran fluida. Karakteristik fisik aliran yang berupa profil kecepatan dan temperatur diselesaikan menggunakan metode beda hingga eksplisit. Berdasarkan hasil numerik, ditunjukkan bahwa untuk variasi bilangan Prandtl dan panjang sumbu silinder, distribusi kecepatan dan temperatur semakin kecil saat bilangan nilai parameter semakin besar. Sedangkan untuk variasi nilai viskoelastik, distribusi kecepatan dan temperatur semakin besar seiring meningkatnya nilai viskoelastis, sedangkan kecepataanya semakin kecil. Untuk variasi parameter sumber panas, distribusi kecepatan dan temperatur meningkat saat parameter sumber panas semakin besar.

**Kata kunci:** fluida viskoelastik, metode beda hingga eksplisit, bilangan Prandtl



# **EFFECT OF VISCOELASTIC FLUID FLOW PAST AN ELLIPTIC CYLINDER**

Name : Annisa Dwi Sulistyaningtyas  
NRP : 1213 2010 53  
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

## **ABSTRACT**

Convection is the heat transfer from one place to another place which is caused by the movement of fluid. Analytical solution of the convection equation is developed from nonlinear of Navier-Stokes then solved by using boundary layer theory. This research considers the steady boundary layer flow and heat transfer of viscoelastic fluid past an elliptic cylinder. The governing equations are developed from continuity, momentum, and energy equations. Dimensional equations are transformed into non-dimensional form and classified into the similarity equations for showing the characteristics of fluid flow. Physical characteristics such as velocity and temperature profiles are solved by using explicit difference method. The numerical results show that for Prandtl number and the axis of cylinder variation, the velocity and the temperature distributions decrease when the parameter value increases. For while variation of viscoelastic value, temperature distributions increase when viscoelastic value increases and the velocity decreases. For variation of heat generation, velocity and temperature distributions increase when heat generation parameter increases.

**Keywords:** viscoelastic fluid, explicit finite difference method, Prandtl numbers



## KATA PENGANTAR

Dengan Rahmat Allah SWT, syukur Alhamdulillah, penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul:

### **”Pengaruh Aliran Fluida Viskoelastik yang Melewati Silinder Eliptik”**

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Terselesaikannya Tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua, Bapak Soelistyo Pribadi dan Ibu Indra Dwi Muhardini, yang telah memberikan motivasi lahir dan batin sampai terselesaikannya Tesis ini.
2. Saudara kandung, Arie Akbar Nugroho, Aisyah Noer Azizah, dan Ahmad Zaki Rosyidi, yang telah memberikan dukungan moral selama penulis menempuh pendidikan sampai mendapat gelar Magister.
3. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D. selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas yang mendukung kepada penulis dalam untuk menyelesaikan Tesis ini.
4. Bapak Prof. Dr. Ir. Adi Soeprojo, M.T. selaku Direktur Program Pascasarjana ITS.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika ITS dan sekaligus sebagai dosen wali selama penulis menempuh pendidikan S2 Matematika ITS.
6. Bapak Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika ITS.
7. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan baik.



8. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T. dan Bapak Dr. Subiono, M.S. selaku dosen penguji atas masukan, kritik, dan saran yang membantu penulis untuk memperbaiki Tesis ini.
9. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuannya kepada penulis dan juga atas segala bantuan, kemudahan, dan kelancaran selama penulis mengikuti proses perkuliahan.
10. Teman-teman S2 Matematika ITS angkatan 2013 yang telah menemani, memotivasi, dan atas segala bantuannya selama ini, khususnya teman-teman tim CFD, Galuh Oktavia Siswono, Wayan Rumite, Mohammad Ghani, Putri Pradika Wanti, dan Mohamad Tafrikan, atas dukungan yang selalu diberikan kepada penulis selama penelitian sampai terselesaikannya Tesis ini.
11. Teman-teman S1 Matematika ITS angkatan 2009 yang selalu memberikan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan pendidikan magister.
12. Ahmad Nurdian Syah atas segala dukungan, nasehat, dan motivasi selama penulis menempuh pendidikan Magister.
13. Semua pihak yang turut serta mendukung dalam penyusunan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan bisa lebih baik dan semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan, dan dapat berkontribusi terhadap kemajuan ITS, bangsa, dan negara.

Surabaya, Mei 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR SIMBOL	xv
<b>BAB I      PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	4
1.5 Manfaat Penelitian .....	4
1.6 Kontribusi Hasil Penelitian .....	4
<b>BAB II      TINJAUAN PUSTAKA DAN LANDASAN TEORI</b>	<b>5</b>
2.1 Penelitian Terdahulu .....	5
2.2 Persamaan Massa, Momentum, dan Energi .....	9
2.2.1 Persamaan Kekekalan Massa .....	9
2.2.2 Persamaan Kekekalan Momentum .....	9
2.2.3 Persamaan Energi .....	12
2.3 Konveksi .....	14
2.3.1 Konveksi Alami .....	14
2.3.2 Konveksi Paksa .....	15
2.4 Viskositas .....	15
2.5 Lapisan Batas ( <i>Boundary Layer</i> ) .....	16
2.6 Fluida .....	17
2.6.1 Fluida Newtonian .....	18

2.6.2	Fluida Non-Newtonian .....	18
2.7	Metode Beda Hingga Eksplisit .....	19
<b>BAB III</b>	<b>METODE PENELITIAN</b>	<b>23</b>
3.1	Tahap Analisis Awal .....	24
3.2	Tahap Implementasi .....	25
3.3	Tahap Analisis Akhir .....	26
<b>BAB IV</b>	<b>MODEL MATEMATIKA</b>	<b>27</b>
4.1	Persamaan Kontinuitas .....	27
4.2	Persamaan Momentum .....	30
4.2.1	Persamaan Energi .....	31
4.2.2	Temperatur Dinding .....	34
<b>BAB V</b>	<b>PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA</b>	<b>35</b>
5.1	Penurunan Persamaan Pembangun .....	35
5.1.1	Persamaan Momentum .....	36
5.1.2	Persamaan Energi .....	45
5.2	Skema Numerik Metode Beda Hingga Eksplisit .....	48
5.3	Penyelesaian Model Matematika untuk Silinder Eliptik .....	53
5.3.1	Penyelesaian Numerik .....	55
5.4	Algoritma .....	59
5.5	Hasil Numerik .....	59
<b>BAB VI</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>67</b>
6.1	Kesimpulan .....	67
6.2	Saran .....	68
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>69</b>
	<b>LAMPIRAN</b>	<b>71</b>
	<b>BIODATA PENULIS</b>	<b>101</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Hasil penelitian Salleh dan Sarif yaitu nilai $f''(0)$ dan $\theta_0$ dengan variasi bilangan Prandtl saat $K = 0$ dan $\gamma = 1$ pada titik stagnasi (Sarif, 2013) . . . . .	6
Tabel 2.2	Klasifikasi fluida non-Newtonian . . . . .	19
Tabel 5.1	Nilai temperatur dinding pada titik stagnasi ( $x \approx 0$ ) dengan variasi bilangan Prandtl ketika $K = 0$ dan $\gamma = 1$ . . . . .	59



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Model fisik dari sistem koordinat silinder eliptik, (Ghasemi, 2012) .....	2
Gambar 2.1	Distribusi kecepatan dengan variasi nilai $\gamma$ pada fluida viskoelastik, (Kasim, 2014) .....	5
Gambar 2.2	Distribusi temperatur dinding untuk $Pr = 1000$ dengan variasi parameter $\gamma$ , (Sarif, 2013) .....	6
Gambar 2.3	Distribusi temperatur dengan pengaruh parameter termodifusi dan gerak Brownian pada silinder eliptik, (Cheng, 2012).....	7
Gambar 2.4	Distribusi temperatur permukaan dengan variasi waktu untuk $Gr = 10^4$ , $Pr = 0.7$ , $r = 0.5$ , dan $\eta = 45^\circ$ (D'Alessio, 2012) .....	8
Gambar 2.5	Komponen gaya tekan pada sumbu x pada volume kendali .	10
Gambar 2.6	Arah dan sistem koordinat dari komponen tegangan geser ...	11
Gambar 2.7	Komponen gaya kental berupa tegangan geser pada volume kendali .....	12
Gambar 2.8	Lapisan batas pada permukaan yang melengkung .....	16
Gambar 2.9	Lapisan batas pada pelat datar .....	17
Gambar 2.10	Titik <i>grid</i> metode beda hingga eksplisit .....	20
Gambar 2.11	Titik <i>grid</i> metode Dufort-Frankel .....	20
Gambar 3.1	Model silinder eliptik tiga dimensi .....	23
Gambar 3.2	Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui silinder eliptik tampak dari depan .....	23
Gambar 4.1	(a) Bentuk kubikal elemen massa dari volume kendali (b) Komponen massa dari elemen volume kendali pada sumbu $x$ .....	27
Gambar 5.1	Model fisik dan sistem koordinat silinder sirkular .....	35
Gambar 5.2	Skema Beda Hingga Eksplisit FTCS .....	49
Gambar 5.3	Model fisik dan sistem koordinat silinder eliptik .....	53



Gambar 5.4	Profil kecepatan aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai viskos .....	60
Gambar 5.5	Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai viskos .....	60
Gambar 5.6	Profil kecepatan pada fluida viskoelastik dengan variasi parameter pembentukan panas ( $\gamma$ ) .....	61
Gambar 5.7	Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi parameter pembentukan panas ( $\gamma$ ) .....	62
Gambar 5.8	Profil kecepatan pada fluida viskoelastik dengan variasi bilangan Prandtl .....	62
Gambar 5.9	Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi bilangan Prandtl .....	63
Gambar 5.10	Profil kecepatan pada fluida viskoelastik dengan variasi nilai a .....	64
Gambar 5.11	Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai a .....	64
Gambar 5.12	Profil kecepatan pada fluida viskoelastik dengan variasi nilai b .....	65
Gambar 5.13	Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai b .....	65

# **BAB I**

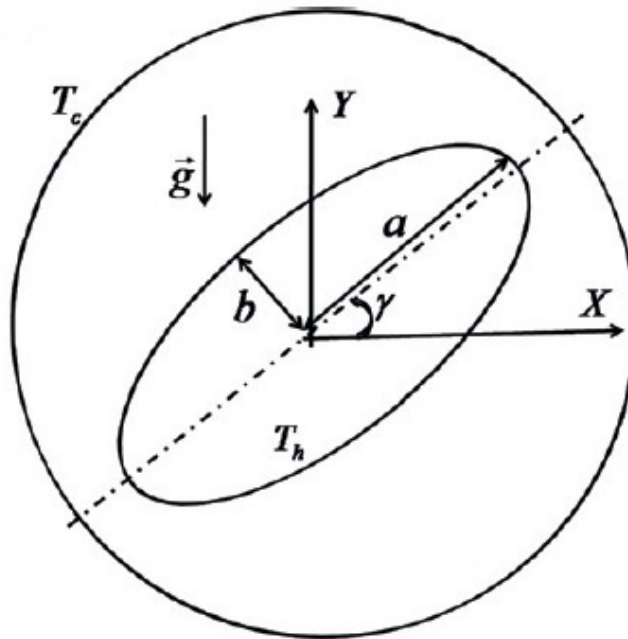
## **PENDAHULUAN**

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan kontribusi yang dapat diberikan dalam penelitian ini. Berikut ini dijelaskan setiap bagian dalam beberapa subbab dibawah ini.

### **1.1 Latar Belakang**

Konveksi merupakan perpindahan panas secara konvektif dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida. Pada umumnya bentuk konveksi dibagi menjadi dua, yakni konveksi bebas (*free convection*) dan konveksi paksa (*forced convection*). Konveksi bebas disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) yang dihasilkan dari perbedaan massa jenis, sesuai dengan variasi suhu fluida. Sedangkan konveksi paksa terjadi pada saat fluida dipaksa untuk mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal maupun internal. Sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir tanpa batasan benda padat atau dengan kata lain fluida mengalir di atas permukaan bidang. Sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda padat, misalnya mengalir melalui pipa (Kasim,2014).

Banyak peneliti melakukan penelitian terhadap jenis-jenis konveksi terutama untuk pengaplikasian teknik. Solusi analitik eksak pada persamaan konveksi juga masih dikembangkan secara kompleks dari kenonlinieran pada Navier-Stokes dan persamaan energi. Persamaan lapisan batas (*boundary layer*) sederhana merupakan upaya awal untuk menghitung permasalahan tersebut. Lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat dimana fluida mengalir yang dipengaruhi oleh viskositas maupun gaya inersia benda tersebut. Proses perpindahan yang berlangsung pada fluida dan benda padat dapat berupa perpindahan momentum, massa, dan panas. Persamaan kontinuitas, momentum, dan energi didapatkan dari hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum Termodinamika. Sehingga dapat disimpulkan bahwa selain aliran lapisan batas, terdapat lapisan batas panas, dan pengaruh timbal balik dari lapisan-lapisan batas lainnya yang juga harus dipertimbangkan. Teori mengenai lapisan batas digunakan pada berbagai ilmu teknik dan sains, seperti hidrodinamik, aerodinamik, kendaraan bermotor, dan teknik kelautan. Beberapa penelitian dengan menggunakan lapisan batas pun



Gambar 1.1: Model fisik dari sistem koordinat silinder eliptik, (Ghasemi, 2012)

sudah sering dilakukan, contohnya aliran fluida pada pelat datar oleh Sharidan, Amin *dkk*(2006), Bataller (2007), Amin dan Das (2013), dan Hussanan (2014)), aliran fluida pada silinder sirkular oleh Anwar *dkk* (2008), dan aliran fluida pada bola oleh Shafie (2005).

Penelitian mengenai perpindahan panas untuk fluida non-Newtonian sangat kurang. Fluida non-Newtonian pada dasarnya mendefinisikan fluida yang memiliki retensi memudahkan "memori" dari alirannya (Brujan,2011). Berikut ini adalah contoh dari fluida non-Newtonian dalam kehidupan sehari hari, yakni fluida pseudoplastik, fluida *shear-thinning*, fluida viskoelastik, dan fluida thixotropik. Fluida viskoelastik adalah tipe fluida non-Newton yang memiliki karakteristik viskos (kental) dan elastis. Sekarang ini tipe fluida ini telah menarik perhatian banyak peneliti karena aplikasi dari fluida ini sangat penting, terutama pada pengeboran minyak, industri makanan dan kertas.

Pada penelitian ini, akan dibahas pengaruh sumber panas dan fluida viskoelastik melewati silinder eliptik. Model fisik dari sistem koordinat silinder eliptik dapat dilihat pada Gambar 1.1.

Aliran fluida viskoelastik tersebut menimbulkan lapisan batas (*boundary layer*). Persamaan lapisan batas yang diperoleh selanjutnya ditransformasikan kedalam bentuk non-dimensional dan selanjutnya ditransformasikan kedalam himpunan persamaan lapisan batas tak-sama (*non-similar*). Persamaan hasil transformasi kemudian diubah ke bentuk persamaan similaritas dan disele-

saikan secara numerik menggunakan metode beda hingga eksplisit. Hasil numerik yang diperoleh nantinya dapat berupa profil temperatur dan kecepatan fluida dengan variasi bilangan Prandtl, nilai viskos, besar sumber panas (*heat generation*), dan panjang sumbu.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang ada, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana mendapatkan model matematika dari fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik.
2. Bagaimana penyelesaian model matematika dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit (*explicit finite difference method*) untuk silinder eliptik.
3. Bagaimana hasil dan pengaruh fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik.

## 1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Perpindahan panas yang terjadi adalah konveksi bebas.
2. Aliran yang diamati bersifat *incompressible*.
3. Aliran yang diamati adalah dalam kondisi *steady*.
4. Diasumsikan flux panas konstan.
5. Domain silinder eliptik tak ada batasan (domain tak hingga).
6. Adanya pengaruh dari sumber panas (*heat generation*).
7. Bagian daerah yang diteliti yaitu pada titik stagnasi terdekat dengan *blunt body* ( $x \approx 0$ ).
8. Penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga eksplisit (*explicit finite difference method*) FTCS.
9. Visualisasi hasil penelitian menggunakan software *Matlab*.

#### **1.4 Tujuan Penelitian**

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Membangun model matematika dari fluida viskoelastik pada silinder eliptik.
2. Menyelesaikan model matematika yang diperoleh dengan menggunakan skema Metode Beda Hingga Eksplisit (*Explicit Finite Difference Method*).
3. Menganalisa hasil dan pengaruh fluida viskoelastik melalui silinder eliptik.

#### **1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu Matematika terapan, khususnya aplikasi metode beda hingga eksplisit pada permasalahan aliran fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik dengan area penelitian terletak pada bagian lapisan batas.

#### **1.6 Kontribusi Hasil Penelitian**

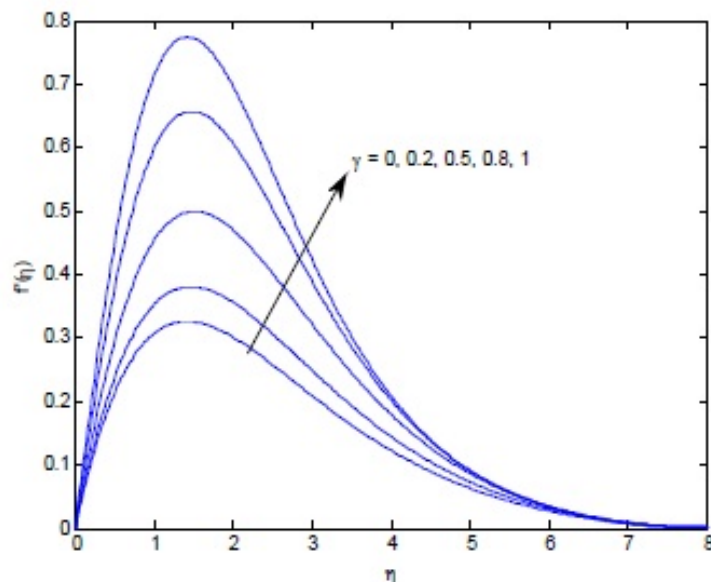
Kontribusi hasil penelitian ini adalah menambah referensi di bidang ilmu Matematika terapan khususnya di bidang fluida yaitu tentang karakteristik fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik dengan adanya pengaruh sumber panas (*heat generation*). Sehingga dapat dikembangkan untuk kepentingan yang lebih bermanfaat, seperti pada bidang teknologi dan industri.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA DAN LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan tentang penelitian terdahulu dan referensi yang digunakan dalam melakukan penelitian. Berikut dijelaskan penelitian-penelitian yang dilakukan sebelumnya dan referensi yang berkaitan dengan penyelesaian masalah dalam penelitian ini.

#### 2.1 Penelitian Terdahulu



Gambar 2.1: Distribusi kecepatan dengan variasi nilai  $\gamma$  pada fluida viskoelastik, (Kasim, 2014)

Pada penelitian yang dilakukan oleh Kasim (2014) menjelaskan tentang fluida viskoelastis pada pelat datar untuk masalah Blasius, mengelilingi silinder sirkular dan bola dengan dua jenis aliran konveksi, yaitu konveksi bebas dan campuran. Mula-mula persamaan lapisan batas ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensional dan kemudian dikelompokkan ke dalam bentuk persamaan similaritas. Hasil yang diperoleh diselesaikan dengan menggunakan skema metode beda hingga kotak Keller. Hasil numeriknya menjelaskan tentang profil kecepatan dan temperatur, *skin friction*, dan perpindahan panas untuk parameter yang berbeda dari kondisi fisiknya, seperti viskoelastis, konveksi campuran, magnetik, pembangkit panas, dan parameter berpori serta bilangan Prandtl. Pada semua kondisi tersebut,

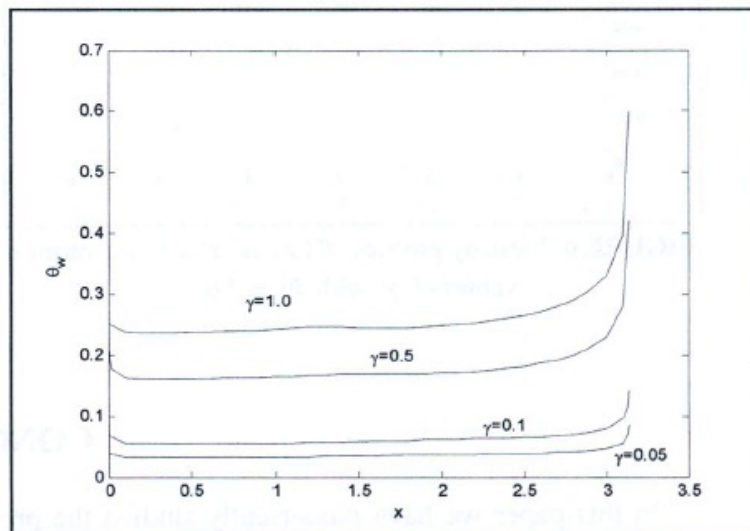


Tabel 2.1: Hasil penelitian Salleh dan Sarif yaitu nilai  $f''(0)$  dan  $\theta_0$  dengan variasi bilangan Prandtl saat  $K = 0$  dan  $\gamma = 1$  pada titik stagnasi (Sarif, 2013)

Pr	$f''(0)$		$\theta_0$	
	Salleh and Nazar [9]	Present results	Salleh and Nazar [9]	Present results
0.5	26.7181	26.7182	92.1979	92.1980
1	11.8648	11.8648	35.4701	35.4701
2	5.7904	5.7903	15.7804	15.7803
3	3.9856	3.9856	10.5357	10.5357
7	2.0714	2.0714	5.2797	5.2797
10	1.5710	1.5711	4.2030	4.2031

kecepatan dan nilai *skin friction* menurun selama temperatur meningkat pada nilai parameter viskoelastis. Pada kasus dinding temperatur, nilai perpindahan panas menurun terhadap kenaikan nilai parameter viskoelastis. Sedangkan untuk flux panas yang konstan, nilai perpindahan panas meningkat pada penambahan nilai parameter viskoelastis. Pengaruh bilangan Prandtl pada fluida viskoelastis adalah menurunkan profil kecepatan dan temperatur. Gambar 2.1 menunjukkan hasil simulasi yang diperoleh dari perhitungan numerik.

Penelitian mengenai konveksi bebas pada silinder sirkular juga dilakukan

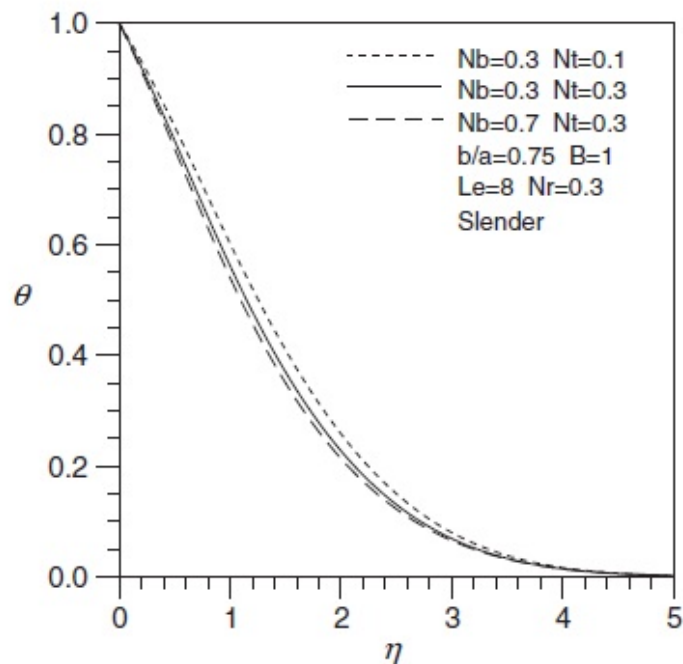


Gambar 2.2: Distribusi temperatur dinding untuk  $Pr = 1000$  dengan variasi parameter  $\gamma$ , (Sarif, 2013)

oleh Sarif dkk (2013). Penelitiannya menjelaskan tentang penyelesaian numerik dari konveksi bebas melalui silinder sirkular dengan menggunakan metode Box-

Keller. Hasil penelitiannya adalah nilai numerik dari *skin friction* dan temperatur dinding pada titik stagnasi yaitu  $x \approx 0$  dengan variasi bilangan Prandtl. Tabel 2.1 menunjukkan hasil perbandingan dari koefisien gesekan dan temperatur dinding pada titik stagnasi, sedangkan Gambar 2.2 menunjukkan tentang hasil simulasi yang diperoleh pada penelitian ini.

Sedangkan penelitian yang dilakukan oleh Cheng (2012) menjelaskan

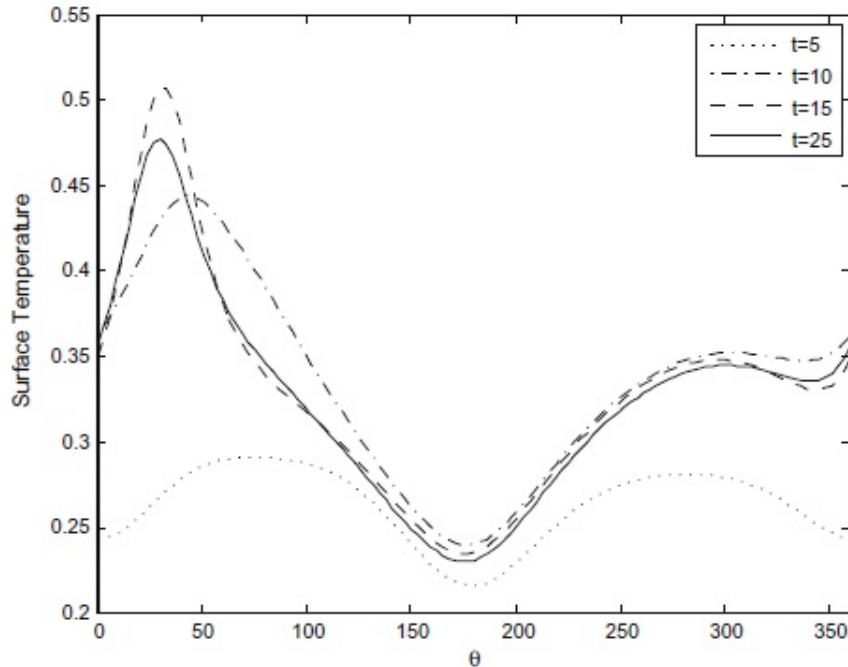


Gambar 2.3: Distribusi temperatur dengan pengaruh parameter termoforesis dan gerak Brownian pada silinder eliptik, (Cheng, 2012)

tentang aliran konveksi bebas lapisan batas yang melalui silinder eliptik horisontal pada nanofluid di media serap yang penuh dengan nanofluid dengan dinding temperatur konstan dan dinding pecahan volume nanopartikel yang konstan. Pengaruh gerakan Brownian dan thermophoresis tergabung ke dalam model untuk nanofluid. Selain itu, juga berpengaruh pada parameter thermophoresis pada profil temperatur, pecahan volume nanopartikel, dan profil kecepatan yang diberikan. Bilangan Nusselt diberikan sebagai fungsi dari parameter thermophoresis, parameter Brownian, bilangan Lewis, dan perbandingan sumbu utama dari silinder eliptik yaitu vertikal (orientasi slender) dan horisontal (orientasi blunt). Hasil dari penelitian ini menyatakan bahwa bilangan Nusselt meningkat sebagai parameter thermophoresis atau parameter Brownian menurun. Bilangan Nusselt meningkat sebagai perbandingan buoyancy atau bilangan Lewis menurun. Selain itu, bilangan Nusselt silinder eliptik dengan orientasi slender lebih tinggi

daripada bilangan Nusselt silinder eliptik dengan orientasi blunt, yaitu lebih lemah setengah silinder. Gambar 2.3 menunjukkan hasil simulasi dari penelitian ini.

Selain itu, penelitian lain juga dilakukan oleh D'Alessio dan Perera (2009).



Gambar 2.4: Distribusi temperatur permukaan dengan variasi waktu untuk  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $r = 0.5$ , dan  $\eta = 45^\circ$  (D'Alessio, 2012)

Penelitian ini menjelaskan tentang konveksi bebas pada liran *unsteady* dari silinder eliptik pada bilangan Grashof yang besar. Penelitian ini menyelesaikan tentang masalah konveksi bebas pada aliran *unsteady* yang melewati silinder eliptic secara numerik dan analitik. Penyelesaian secara analitik valid untuk waktu yang sedikit dan bilangan Grashof besar serta diturunkan dan dibandingkan dengan penyelesaian secara numerik yang menggunakan persamaan pembangun dari Navier-Stokes dan persamaan energi. Persamaan tersebut ditunjukkan dalam bentuk *streamfunction* dan kecepatan yang subjek penyelesaiannya *no-slip* dan flux panasnya konstan pada permukaan dengan *far-field* dan kondisi awal yang diam. Perbandingan antara penyelesaian analitik dan numerik sama seperti hasil pada eksperimen, sehingga sesuai pada semua kasus. Gambar 2.4 menunjukkan hasil simulasi dari penelitian dengan menggunakan parameter dari bilangan Grashof dan bilangan Prandtl.

## 2.2 Persamaan Massa, Momentum, dan Energi

### 2.2.1 Persamaan Kekekalan Massa

Menurut Teorema Pengangkutan Reynold, (Potter *dkk*, 2012):

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{cv} \eta \rho dV + \int_{cs} \eta \rho \bar{n} \cdot \mathbf{V} dA \quad (2.1)$$

Suatu sistem berupa kumpulan partikel fluida, maka massa-nya dapat ditetapkan sebagai berikut:

$$\frac{Dm_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = 0 \quad (2.2)$$

pada Persamaan (2.1),  $N_{sys}$  menunjukkan massa pada sistem, jika  $\eta = 1$  maka persamaan kekekalan massa menjadi:

$$\frac{d}{dt} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \bar{n} \cdot \mathbf{V} dA = 0 \quad (2.3)$$

dapat juga ditulis dalam bentuk ketetapan volume kendali berikut:

$$\int_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{cs} \rho \bar{n} \cdot \mathbf{V} dA = 0 \quad (2.4)$$

Pada aliran *steady*, persamaan kekekalan massa dapat ditulis:

$$\int_{cs} \rho \bar{n} \cdot \mathbf{V} dA = 0 \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Persamaan Kekekalan Momentum

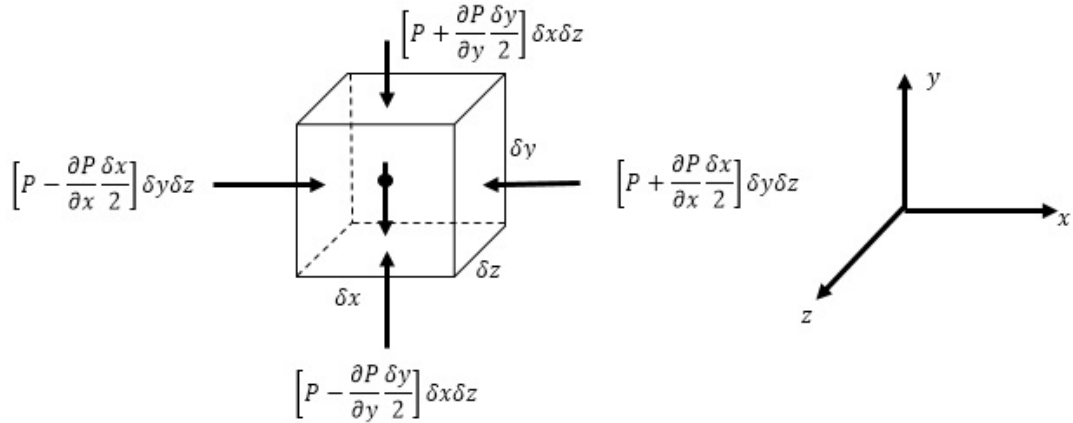
Pada hukum II Newton yang disebut persamaan momentum, didapat bahwa resultan gaya berlaku pada sistem yang sama dengan tingkat perubahan momentum dari sistem tersebut. Secara umum, persamaan momentum dapat ditulis sebagai berikut (Potter *dkk*, 2012):

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{V} dV = \Sigma \mathbf{F} \quad (2.6)$$

dengan menggunakan Persamaan (2.1) dan mengganti  $\eta$  dengan  $\mathbf{V}$ , maka persamaan momentum untuk volume kendali dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \int_{cv} \rho \mathbf{V} dV + \int_{cs} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \bar{n}) dA = \Sigma \mathbf{F} \quad (2.7)$$

Gaya yang bekerja pada persamaan momentum antara lain gaya tekan ( $F_p$ ), gaya kental ( $F_k$ ), dan gaya gravitasi ( $F_g$ ). Untuk gaya tekan, digunakan deret Taylor untuk mendapatkan komponen-komponen gaya tekan pada permukaan volume



Gambar 2.5: Komponen gaya tekan pada sumbu x pada volume kendali

kendali. Sehingga, diperoleh gaya tekan permukaan pada sumbu  $x$  berikut ini (Munson, 2002):

$$\delta F_x = \left[ P - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z$$

atau

$$\delta F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (2.8)$$

Dengan langkah yang sama, didapatkan resultan gaya tekan permukaan pada sumbu  $y$  berikut ini:

$$\delta F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2.9)$$

dan pada sumbu  $z$

$$\delta F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.10)$$

Resultan gaya tekan ( $F_p$ ) pada permukaan volume kendali dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta F_p = \delta F_x \hat{i} + \delta F_y \hat{j} + \delta F_z \hat{k}$$

atau

$$\delta F_p = -\left( \frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (2.11)$$

dengan  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , dan  $\hat{k}$  merupakan satuan vektor sepanjang sumbu koordinat. Dalam bentuk vektor gradien, tekanan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k} = \nabla P \quad (2.12)$$

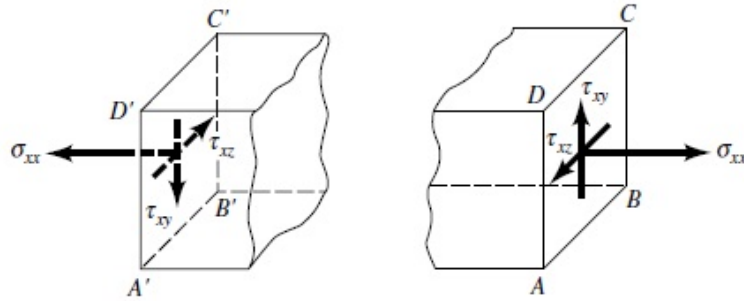
Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa aliran fluida yang dianalisis adalah aliran fluida pada bidang  $xy$ . Sehingga, Persamaan (2.11) dan (2.12) dapat dinyatakan dengan

$$\delta F_p = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j}\right)\delta x\delta y \quad (2.13)$$

dan

$$\frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j} = \nabla P \quad (2.14)$$

Berdasarkan Persamaan (2.13) dan (2.14), resultan gaya tekan pada permukaan per satuan volume dapat dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 2.6: Arah dan sistem koordinat dari komponen tegangan geser

$$\frac{\delta F_p}{\delta x\delta y} = -\nabla P \quad (2.15)$$

Sedangkan untuk gaya kental ( $F_k$ ) terdapat pengaruh dari tegangan geser. Arah dari komponen tegangan geser ditunjukkan pada Gambar 2.6. Pada sisi ABCD terdapat komponen tegangan geser yaitu  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ , dan  $\tau_{xz}$  yang terletak pada sumbu  $x$  positif. Sedangkan pada sisi A'B'C'D' terdapat komponen tegangan geser pada sumbu  $x$  negatif. Pada gaya permukaan digambarkan pada bentuk elemen kubikal yang diasumsikan kecil. Gambar 2.7 menggambarkan komponen tegangan geser secara umum, sehingga diperoleh komponen  $F_k$  pada sumbu  $x$  berikut ini:

$$\delta F_{kx} = \left(\frac{\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z \quad (2.16)$$

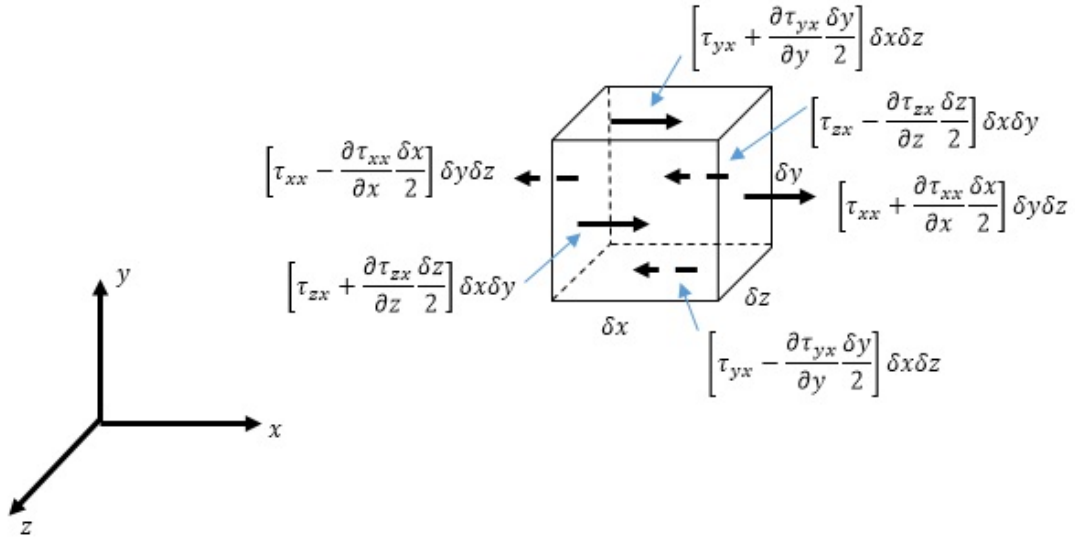
pada sumbu  $y$

$$\delta F_{ky} = \left(\frac{\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\tau_{zy}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z \quad (2.17)$$

dan sumbu  $z$

$$\delta F_{kz} = \left(\frac{\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\tau_{zz}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z \quad (2.18)$$





Gambar 2.7: Komponen gaya kental berupa tegangan geser pada volume kendali

Resultan gaya kental pada permukaan dapat dinyatakan dengan:

$$\delta F_k = \delta F_{kx} \hat{i} + \delta F_{ky} \hat{j} + \delta F_{kz} \hat{k} \quad (2.19)$$

Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa fluida mengalir pada bidang  $xy$ , maka Persamaan (2.19) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\delta F_k = \delta F_{kx} \hat{i} + \delta F_{ky} \hat{j} \quad (2.20)$$

### 2.2.3 Persamaan Energi

Banyak masalah fluida yang diselesaikan dengan menggunakan hukum termodinamika yang biasa disebut dengan persamaan energi. Pada kasus perpindahan panas, seperti pada boiler atau kompressor, atau pekerjaan yang diselesaikan dengan pompa atau turbin, dibutuhkan persamaan energi dalam proses penyelesaiannya. Selain itu, juga digunakan untuk menghubungkan tekanan dan kecepatan ketika persamaan Bernoulli tidak digunakan. Hal itu yang menyebabkan pengaruh kekentalan *viscous* tidak dapat diabaikan. Persamaan energi dalam bentuk volume kontrol adalah sebagai berikut (Potter dkk, 2012):

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV \quad (2.21)$$

dengan spesifik energi  $e$  meliputi spesifik energi kinetik  $\frac{V^2}{2}$ , spesifik energi potensial  $gz$ , dan spesifik energi internal  $\tilde{u}$ , sehingga dapat ditulis:

$$e = \frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \quad (2.22)$$

Dalam hal ini, tidak memasukkan bentuk energi lainnya, seperti energi yang disebabkan karena adanya pengaruh magnetik atau elektrik, atau energi yang disebabkan karena reaksi kimia. Bentuk dari volume kontrol untuk persamaan energi dapat ditulis:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} \rho e \mathbf{V} \cdot \bar{n} dA \quad (2.23)$$

dengan  $\dot{Q}$  adalah besar perpindahan panas dan  $\dot{W}$  adalah besar usaha yang dilakukan pada sistem yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\dot{W} = \int_{cs} \rho \bar{n} \cdot \mathbf{V} dA + \dot{W}_s + \dot{W}_{shear} + \dot{W}_I \quad (2.24)$$

Sehingga secara umum persamaan energi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt} \int_{cv} e \rho dV + \int \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \bar{n} dA \quad (2.25)$$

Besar usaha dibutuhkan untuk memindahkan gaya tekanan yang telah dipindahkan ke sisi kanan, seperti fluks energi. Substitusikan Persamaan (2.22) ke Persamaan (2.25), sehingga menghasilkan:

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I &= \frac{d}{dt} \int_{cv} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz + \bar{n} \right) \rho dV + \\ &+ \int_{cs} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz + \tilde{u} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \bar{n} dA \end{aligned} \quad (2.26)$$

Diasumsikan temperatur dari volume kendali tidak berubah, energi internal tidak berubah, dan kehilangan keseimbangan perpindahan panas yang melintang pada permukaan kendali. Perpindahan panas dapat dihasilkan dari proses konveksi, radiasi, dan induksi di permukaan kendali. Pada penjelasan dalam mekanika fluida, jumlah dari pengaruh tersebut disamaratakan dan dinotasikan dengan  $\dot{Q}$ . Kemudian didefinisikan *losses* sebagai jumlah dari semua bentuk energi yang tidak digunakan,

maka:

$$losses = -\dot{Q} + \frac{d}{dt} \int_{cv} \tilde{u} \rho dV + \int_{cs} \tilde{u} \rho \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA \quad (2.27)$$

Maka persamaan energi dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} -\dot{W}_s - \dot{W}_{shear} - \dot{W}_I &= \frac{d}{dt} \int_{cv} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz \right) \rho dV + \int_{cs} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA \\ &+ losses \end{aligned} \quad (2.28)$$

atau

$$\begin{aligned} -\Sigma W &= \frac{d}{dt} \int_{cv} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz \right) \rho dV + \int_{cs} \left( \frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA \\ &+ losses \end{aligned} \quad (2.29)$$

Losses dipengaruhi oleh dua hal, yaitu:

1. Viskositas yang disebabkan oleh *internal friction* yang menghasilkan peningkatan energi internal (temperatur meningkat) atau perpindahan panas
2. Perubahan geometri yang menghasilkan pemisahan aliran yang menghendaki energi digunakan untuk mempertahankan hasil gerak yang kedua yaitu menguraikan kekentalan

## 2.3 Konveksi

Konveksi perpindahan panas terjadi akibat gerakan molekular dan gerakan fluida dalam jumlah besar. Konveksi perpindahan panas dikategorikan ke dalam dua bentuk aliran, yaitu konveksi alami dan konveksi paksaan (Long dan Sayma, 2009).

### 2.3.1 Konveksi Alami

Pada konveksi alami atau konveksi bebas, gerakan fluida dipengaruhi oleh perbedaan densitas dengan perubahan temperatur oleh pemanas atau pendingin. Dengan kata lain, aliran fluida dipengaruhi oleh gaya Buoyancy. Gaya Buoyancy disebabkan oleh kombinasi gradien densitas fluida dengan gaya tubuh (*body force*) yang dapat memproporsionalkan densitas. Kemudian perpindahan panas membentuk aliran yang membawa energi dari titik dimana perpindahan panas terjadi. Secara umum, kecepatan konveksi alami lebih kecil daripada yang terjadi pada konveksi paksaan. Hal tersebut disebabkan karena koefisien perpindahan panasnya lebih kecil.

Jika  $\rho_\infty$  merupakan densitas "*undisturbed*" fluida dingin dan  $\rho$  merupakan

densitas dari fluida panas maka gaya Buoyancy per satuan volume  $F$  fluida adalah sebagai berikut:

$$F = (\rho_{\infty} - \rho)g \quad (2.30)$$

dengan  $g$  adalah percepatan gravitasi. Sedangkan untuk variasi densitas dengan temperatur adalah

$$\rho_{\infty} = \rho(1 + \beta\Delta T) \quad (2.31)$$

dengan  $\beta$  merupakan koefisien perluasan suhu volumetric ( $1/K$ ) dan  $\Delta T$  merupakan perbedaan temperatur antara dua area fluida. Jika Persamaan (2.31) disubstitusikan ke Persamaan (2.30), maka gaya Buoyancy dapat ditulis:

$$F = \rho g \beta \Delta T \quad (2.32)$$

### 2.3.2 Konveksi Paksa

Pada konveksi paksa, gerakan fluida dipengaruhi oleh gaya eksternal. Sebagai contoh aliran udara yang disebabkan oleh kipas angin, angin, atau oleh gerakan kendaraan, dan aliran air dengan pemanas, pendingin, penyuplai dan sistem drainase. Dalam semua proses tersebut pergerakan fluidanya membawa energi, baik sengaja maupun tidak.

Untuk mempermudah dalam melakukan analisa lebih kompleks tentang gejala konveksi, digunakan parameter kendali dalam bentuk bilangan non-dimensional yang relevan untuk konveksi, antara lain:

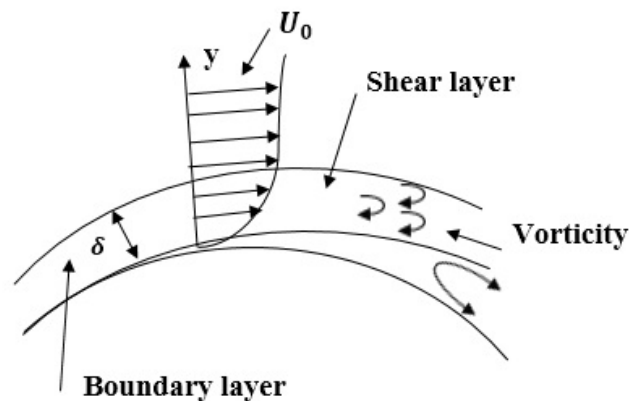
- Bilangan Reynolds, merupakan perbandingan gaya inersia dan gaya kental.
- Bilangan Prandtl, merupakan perbandingan antara diffusivitas momentum dengan diffusivitas suhu.
- Bilangan Grashof, merupakan perbandingan Buoyancy dengan gaya kental.
- Bilangan Nusselt, merupakan perbandingan konduksi dengan konveksi suhu.
- Bilangan Reyleigh, merupakan perbandingan suhu energi yang dibebaskan oleh Buoyancy dengan energi yang berasal dari konduksi panas dan tarikan viskos.

## 2.4 Viskositas

Pengukuran dari ketahanan fluida yang diubah baik dengan tekanan maupun tegangan. Pada fluida, viskositas adalah kekentalan atau pergesekan internal. Oleh karena itu, air yang tipis, memiliki viskositas lebih rendah, sedangkan

madu yang kental, memiliki viskositas yang lebih tinggi. Sederhananya, semakin rendah viskositas suatu fluida, semakin besar juga pergerakan dari fluida tersebut. Viskositas menjelaskan ketahanan internal fluida untuk mengalir dan mungkin dapat dipikirkan sebagai pengukuran dari pergeseran fluida. Sebagai contoh viskositas yang tinggi dari magma akan menciptakan statovolcano yang tinggi dan curam karena tidak dapat mengalir terlalu jauh sebelum mendingin, sedangkan viskositas yang lebih rendah dari lava akan menciptakan volcano yang rendah dan lebar. Seluruh fluida (kecuali superfluida) memiliki ketahanan dari tekanan sehingga disebut kental, tetapi fluida yang tidak memiliki ketahanan tekanan dan tegangan disebut fluida ideal.

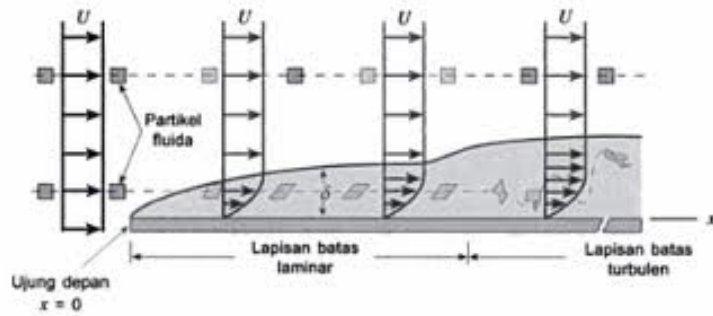
## 2.5 Lapisan Batas (*Boundary Layer*)



Gambar 2.8: Lapisan batas pada permukaan yang melengkung

*Boundary layer* adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat tempat fluida mengalir, dimana di dalam lapisan tersebut pengaruh viskositas maupun gaya inersia sangat berpengaruh. Lapisan batas laminar dapat dengan mudah diklasifikasikan menurut struktur dan keadaan di mana mereka diciptakan. Lapisan geser tipis (*thin shear*) yang berkembang pada tubuh yang berosilasi adalah contoh dari lapisan batas Stokes, sedangkan lapisan batas Blasius mengacu pada kesamaan solusi pada pelat datar yang terpasang berdekatan. Ketika fluida berputar dan gaya viskus yang seimbang dengan efek Coriolis (bukan konvektifinersia), bentuk lapisan Ekman. Dalam teori perpindahan panas, lapisan batas termal yang terjadi. Permukaan dapat memiliki beberapa jenis lapisan batas secara bersamaan. Gambar 2.8 menunjukkan lapisan batas pada permukaan yang melengkung dan Gambar 2.9 menunjukkan lapisan batas pada permukaan yang berbentuk pelat datar.

Koefisien *local skin friction* merupakan bentuk dimensional dari dinding



Gambar 2.9: Lapisan batas pada pelat datar

*shearing stress*. Biasanya dinotasikan dengan  $c_f$ , yaitu:

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (2.33)$$

Jika dinding *shear* diintegrasikan sepanjang  $L$ , maka disebut bentuk *skin friction coefficient* dan dinotasikan dengan  $C_f$ , yaitu:

$$C_f = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} \quad (2.34)$$

## 2.6 Fluida

Zat yang tersebar di alam dibedakan dalam tiga fase, yaitu fase padat, cair, dan gas. Karena fase cair dan gas memiliki karakter tidak mempertahankan bentuk yang tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir, dengan demikian keduanya disebut fluida. Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun kecilnya tegangan geser tersebut (Widodo, 2012).

Perbedaan zat cair dan gas ialah zat cair merupakan zat yang tak mampu mampat (*incompressible*), sedangkan gas merupakan zat yang mampu mampat (*compressible*). Kemampatan adalah perubahan (pengecilan) volume karena adanya perubahan (penambahan) tekanan. Untuk fluida cair, tekanan dapat diabaikan dan viskositasnya akan turun dengan cepat bila temperaturnya dinaikkan.

Untuk fluida pada umumnya, tegangan dan laju regangan geser (gradient kecepatan) dapat dikaitkan dalam suatu hubungan dalam bentuk (Munson, 2004):

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.35)$$



### 2.6.1 Fluida Newtonian

Fluida Newtonian (istilah yang diperoleh dari nama Isaac Newton) adalah suatu fluida yang memiliki kurva tegangan/regangan yang linier. Contoh umum dari fluida yang memiliki karakteristik ini adalah air. Keunikan dari fluida newtonian adalah fluida ini akan terus mengalir sekalipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Hal ini disebabkan karena viskositas dari suatu fluida newtonian tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas dari suatu fluida newtonian hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Viskositas sendiri merupakan suatu konstanta yang menghubungkan besar tegangan geser dan gradien kecepatan pada persamaan

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \text{linear}$$

Pada fluida Newtonian, tekanan viskosnya proposional untuk ukuran deformasi. Bentuk tiga dimensi dari viskositas hukum Newton untuk aliran tunak *compressible* melibatkan dua konstanta yang proposional, yaitu viskositas dinamis ( $\mu$ ) untuk menghubungkan tekanan pada deformasi linier dan viskositas yang kedua ( $\lambda$ ) untuk menghubungkan tekanan pada deformasi volumetrik. Kesembilan komponen tekanan viskos dan enam diantaranya saling bergantung adalah sebagai berikut (Versteg, 1995):

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{2.36}$$

Tidak banyak yang tahu tentang viskositas yang kedua ( $\lambda$ ), karena pengaruhnya kecil. Untuk gas, pendekatan nilainya adalah  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  (Schichting, 1979). Gas merupakan fluida *incompressible* yang persamaan kekekalan massanya berlaku persamaan kontinuitas yaitu  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  dan tekanan viskosnya hanya dua kali ukuran lokal dari waktu deformasi linier viskositas dinamis.

### 2.6.2 Fluida Non-Newtonian

Fluida non-Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini menyebabkan fluida non-Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan dan laju deformasi berlangsung tak linier atau dengan kata lain tidak memenuhi hukum linierisasi

**Tabel 2.2: Klasifikasi fluida non-Newtonian**

Tipe Fluida	Perilaku	Karakteristik	Contoh
Plastis padat	Plastis sempurna	Tegangan tidak menghasilkan regangan yang berkebalikan	Logam duktil
	Plastis Bingham	Tegangan geser dan regangan memiliki hubungan linier bila batas tegangan geser mulai berpengaruh terlampaui	Lumpu, beberapa koloid
	Yield pseudoplastis	Pseudoplastis yang melampaui beberapa batas tegangan geser mulai berpengaruh	
	Yield Dilatant	Dilatant yang melampaui beberapa batas tegangan geser mulai berpengaruh	
Fluida eksponensial	Pseudoplastis	Pengurangan viskositas terlihat dengan jelas dengan adanya peningkatan gaya geser	Beberapa koloid, tanah liat, susu, gelatin, darah
	Dilatant	Peningkatan viskositas terlihat dengan jelas dengan adanya peningkatan gaya geser	Larutan gula pekat dalam air, suspensi pati beras atau pati jagung
Viskoelastis	Material Maxwell	Kombinasi linier "seri" dari efek elastis dan viskos	Logam material komposit
	Fluida Oldroyd-B	Kombinasi linier dari perilaku Maxwell dan Newtonian	Bitumen, adonan nilon
	Anelastis	Material kembali ke bentuk awal bila gaya yang bekerja dihilangkan	
Viskositas yang bergantung waktu	Rheopektik	Peningkatan viskositas terlihat dengan jelas seiring dengan lama durasi tegangan	Beberapa lubrikan
	Tiksotropik	Penurunan viskositas terlihat dengan jelas seiring dengan lama durasi tegangan	Saus tomat dan beberapa jenis madu

Newton.

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \text{tak linear}$$

Klasifikasi fluida non-Newtonian dijelaskan pada Tabel 2.2.

## 2.7 Metode Beda Hingga Eksplisit

Metode beda hingga eksplisit merupakan salah satu metode penyelesaian persamaan parabolik. Jenis-jenis metode beda hingga eksplisit adalah sebagai berikut (Hoffman dan Chiang, 2000):

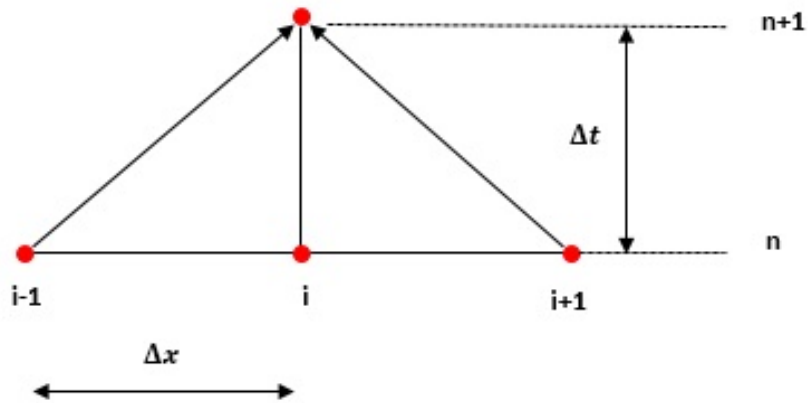
### 1. Metode FTCS (*Forward Time Central Space*)

Metode ini menggunakan pendekatan beda maju untuk turunan waktunya dan beda pusat untuk turunan spasialnya.

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (2.37)$$

dengan order  $[(\Delta t), (\Delta x)^2]$ . Metode ini stabil saat  $\alpha \Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1/2$ . Gambar 2.10 menunjukkan tentang *grid* dari metode FTCS. Dalam penelitian ini digunakan metode beda hingga eksplisit jenis FTCS untuk menyelesaikan

model matematika pada kasus fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik.



Gambar 2.10: Titik *grid* metode beda hingga eksplisit

## 2. Metode Richardson

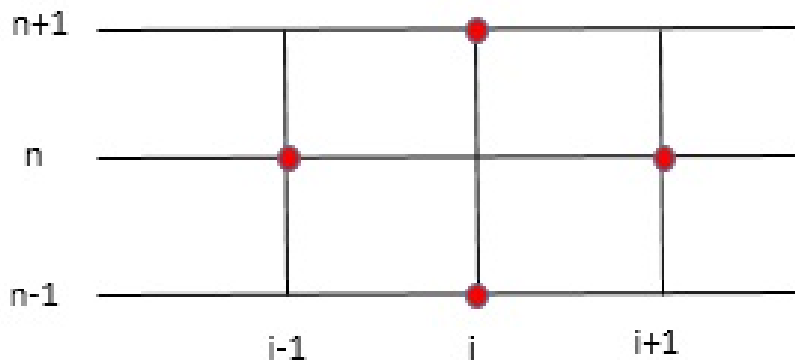
Metode ini menggunakan pendekatan beda pusat pada turunan waktu dan spasialnya. Model persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.38)$$

dengan order  $[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$ . Metode ini stabil bersyarat dan tidak mempunyai nilai yang spesifik.

## 3. Metode Dufort-Frankel

Pada formulasi ini, turunan waktunya  $\frac{\partial u}{\partial t}$  didekati dengan beda pusat berorder



Gambar 2.11: Titik *grid* metode Dufort-Frankel

$(\Delta t)^2$ . Order kedua pada turunan spasialnya juga didekati dengan beda pusat berorder  $(\Delta x)^2$ , karena pertimbangan stabilitas,  $u_i^n$  dalam bentuk difusi diganti dengan nilai rata-rata dari  $u_i^{n+1}$  dan  $u_i^{n-1}$ . Formulasi ini merupakan modifikasi dari metode Richardson, sehingga bentuk beda hinganya adalah sebagai berikut:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2\frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2} + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.39)$$

atau dapat ditulis:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \left[ u_{i+1}^n - u_i^{n+1} - u_i^{n-1} + u_{i-1}^n \right] \quad (2.40)$$

walaupun nilai  $n + 1$  terletak pada bagian kanan, hanya letak dari  $i$ , maka persamaan dapat diselesaikan secara eksplisit untuk  $u_i$  yang tidak diketahui, pada waktu ke  $n + 1$ . Maka diperoleh:

$$\left[ 1 + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \right] u_i^{n+1} = \left[ 1 - 2\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \right] u_i^{n-1} + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \left[ u_{i+1}^n + u_{i-1}^n \right] \quad (2.41)$$

Metode ini menggunakan order  $[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta t/\Delta x)^2]$ . Formula ini stabil tak bersyarat. Bentuk penambahan  $(\Delta t/\Delta x)^2$  termasuk dalam bentuk error sebagai hasil dari analisa konsistensi. Gambar 2.11 menunjukkan titik *grid* metode Dufort-Frankel.

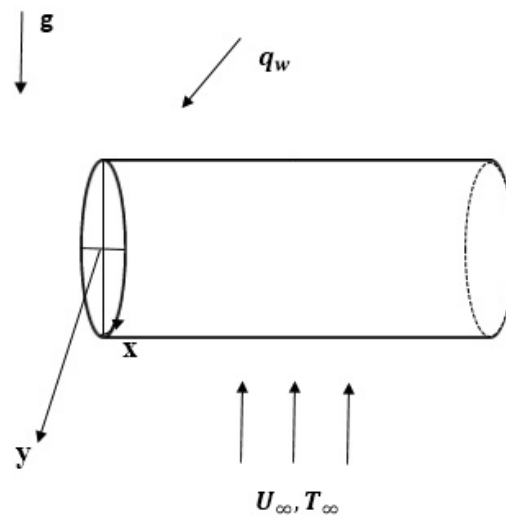


### BAB III

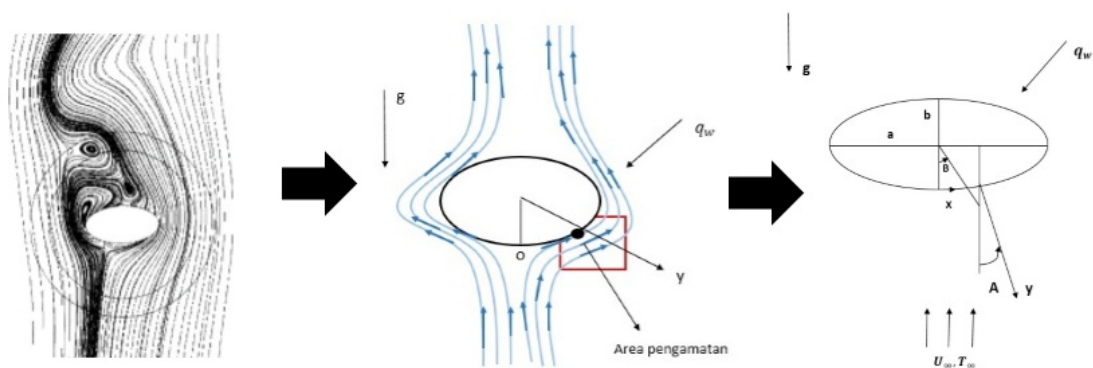
### METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tahap-tahap dalam melakukan penelitian dari tahap analisis awal, tahap implementasi, dan tahap analisis akhir. Berikut dijelaskan tahap-tahap penyelesaian permasalahan pada penelitian ini ke dalam beberapa subbab.

Berdasarkan Gambar 3.1 dan 3.2 dapat diketahui bahwa aliran fluida dari



Gambar 3.1: Model silinder eliptik tiga dimensi



Gambar 3.2: Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui silinder eliptik tampak dari depan

bawah ke atas mengalir dengan kecepatan  $U_\infty$  dan dipengaruhi oleh gaya gravitasi,

serta temperatur  $T_\infty$ . Karena pengaruh dari fluida viskoelastik yang dominan, maka penelitian dilakukan di daerah lapisan batas dari silinder eliptik, yaitu pada titik stagnasi bawah ( $x \approx 0$ ). Aliran fluida melewati silinder eliptik dengan panjang sumbu  $a$  (normal terhadap aliran fluida) dan sumbu  $b$  (searah dengan aliran fluida). Pada sistem koordinat tersebut, terdapat  $A$  yaitu sudut yang dibentuk antara garis normal bagian luar silinder dengan garis vertikal lengkung bawah silinder dan  $B$  merupakan sudut yang dibentuk antara sumbu  $b$  dengan garis normal dari sudut  $A$ . Selain itu, pada aliran tersebut juga dipengaruhi oleh flux panas yang konstan  $q_w$ .

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, bahwa untuk membangun sebuah model matematika dari fluida viskoelastik pada silinder eliptik dan mengetahui hasil serta pengaruhnya diperlukan persamaan massa, momentum, dan energi. Selain itu, juga dipengaruhi oleh parameter non-dimensional dan parameter yang berhubungan dengan kasus tersebut. Untuk menjawab rumusan masalah tersebut, maka langkah-langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membangun model matematika dari persamaan massa, momentum, dan energi dalam bentuk persamaan dimensional.
2. Mentransformasikan ke dalam bentuk non-dimensional dengan menggunakan variabel non-dimensional yang telah ditentukan.
3. Mengubah ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi aliran (*stream function*).
4. Mencari pengaruh dari beberapa parameter, yaitu bilangan Prandtl, parameter pembentukan panas, dan nilai viskoelastik.
5. Visualisasi aliran pada titik stagnasi bawah dari silinder eliptik. Proses visualisasi dilakukan dengan menggunakan software Matlab.

Pada penelitian ini akan dilakukan dalam bentuk simulasi numerik, sehingga dilakukan tiga tahapan, yaitu tahap analisis awal, tahap implementasi, dan tahap analisis akhir.

### **3.1 Tahap Analisis Awal**

Pada tahap ini akan dianalisis parameter-parameter yang berhubungan dengan temperatur dan kecepatan pada silinder eliptik. Beberapa rumus yang berhubungan dengan gaya hambat tersebut antara lain:

1. *Skin friction coefficient*, yaitu

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_\infty U_\infty^2} \quad (3.1)$$

2. Bilangan Grashof, yaitu

$$Gr = \frac{g\beta a q_w a^3}{k\nu^2} \quad (3.2)$$

3. Temperatur dinding, yaitu

$$\theta_w = \frac{a q_w}{k(T_w - T_\infty)} \quad (3.3)$$

4. Parameter viskoelastik, yaitu

$$K = \frac{k_0 Gr^{1/2}}{\rho a^2} \quad (3.4)$$

5. Bilangan Prandtl, yaitu

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.5)$$

6. Parameter pembentukan panas, yaitu

$$\gamma = \frac{a^2 Q_0}{\nu C_p Gr^{1/2}} \quad (3.6)$$

Dari banyaknya parameter tersebut, apakah semua parameter mempengaruhi besarnya temperatur dan kecepatan dalam penelitian ini, atau hanya beberapa saja.

### 3.2 Tahap Implementasi

Pada tahap ini, peneliti akan mengimplementasikan dan mengilustrasikan kinerja skema numerik. Untuk aliran *steady* dan *incompressible*, maka digunakan persamaan sebagai berikut (Ghasemi dkk, 2012):

$$f''' + f f'' - (f')^2 + \theta \sin A - K(2f' f''' - f f^{(4)} - (f'')^2) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' + \gamma \theta = 0 \quad (3.8)$$

Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap implementasi, yaitu:

1. Perlu dilakukan proses grid terlebih dahulu karena persamaan diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian numerik.



2. Proses pendiskritan persamaan pembangun dan menggunakan skema beda hingga eksplisit FTCS.
3. Visualisasi aliran dari hasil numerik dengan menggunakan Matlab.

### **3.3 Tahap Analisis Akhir**

Pada tahap ini, akan dijelaskan hasil dari tahap implementasi dengan berbagai perbandingan parameter yang digunakan. Kemudian dijelaskan juga hasil dan pengaruh parameter-parameter tersebut kaitannya dengan fluida viskoelastik dan perpindahan panasnya.

## BAB IV

### MODEL MATEMATIKA

Pada penelitian ini digunakan beberapa persamaan pembangun untuk membangun model matematika dari aliran fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik. Adapun persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini, yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Berikut akan diuraikan dari masing-masing persamaan tersebut.

#### 4.1 Persamaan Kontinuitas

Sesuai dengan hukum konservasi massa, yaitu laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem sama dengan nol atau secara matematis dapat ditulis (Potter *dkk*, 2012):

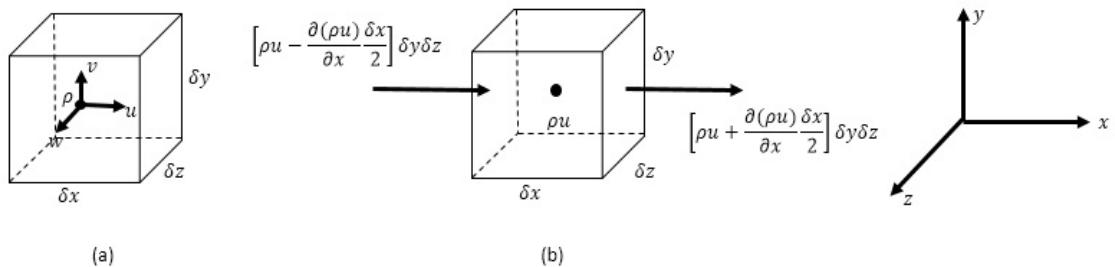
$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dengan massa dari suatu sistem dinyatakan dengan

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho d\forall \quad (4.2)$$

dengan  $\rho$  merupakan densitas fluida dan  $\forall$  merupakan volume fluida. Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.1) ke Persamaan (4.2), maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho d\forall = 0 \quad (4.3)$$



Gambar 4.1: (a) Bentuk kubikal elemen massa dari volume kendali (b) Komponen massa dari elemen volume kendali pada sumbu  $x$

Dengan menggunakan teorema pengangkutan Reynolds, laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \bar{n} dA \quad (4.4)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.1) diperoleh persamaan

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \bar{n} dA = 0 \quad (4.5)$$

Gambar 4.1a menunjukkan bentuk dari volume kendali. Pada bagian pusat elemen terdapat densitas  $\rho$  dan komponen kecepatan  $u, v$  dan  $w$ . Karena elemen diasumsikan kecil, Persamaan (4.5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4.6)$$

Jumlah aliran massa pada permukaan elemen pada volume kendali dapat diperoleh dari aliran sumbu koordinat yang digambarkan secara terpisah. Seperti pada Gambar 4.1b, aliran pada sumbu  $x$  digambarkan dengan jumlah massa dari aliran yang masuk dan keluar dari bagian pusat elemen, sehingga pada aliran yang keluar didefinisikan:

$$\rho u|_{x+\frac{\delta x}{2}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.7)$$

sedangkan untuk bagian aliran yang masuk

$$\rho u|_{x-\frac{\delta x}{2}} = \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.8)$$

Karena  $\mathbf{V} \cdot \bar{n}$  didefinisikan sebagai besar proyeksi kecepatan aliran fluida yang tegak lurus dengan permukaan volume kendali, maka total aliran massa pada sumbu  $x$  dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[ \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.9)$$

Dengan langkah yang sama, didapatkan aliran massa pada sumbu  $y$  berikut ini:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.10)$$

dan aliran massa pada sumbu  $z$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.11)$$

Total aliran massa pada aliran dapat ditulis sebagai berikut:

$$\left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (4.12)$$

Berdasarkan Persamaan (4.5), (4.6), dan (4.12) dapat disimpulkan bahwa persamaan konservasi massa dari aliran adalah

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.13)$$

Persamaan (4.13) biasa disebut persamaan kontinuitas. Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa aliran fluida yang dianalisis adalah aliran fluida pada bidang  $xy$ , maka Persamaan (4.13) dinyatakan dengan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (4.14)$$

Selanjutnya, diasumsikan dalam penelitian ini bahwa aliran fluida dalam kondisi tunak (*steady*), yaitu aliran fluida tidak bergantung terhadap waktu. Sehingga mengakibatkan  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Maka Persamaan (4.14) dapat dinyatakan dengan

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

atau dalam bentuk vektor dapat ditulis dengan

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (4.15)$$

Dalam penelitian ini, juga diasumsikan bahwa aliran bersifat *incompressible*, yaitu  $\rho$  konstan, maka Persamaan (4.15) dapat dinyatakan dengan

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.16)$$

Dalam bentuk skalar, Persamaan (4.16) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.17)$$

## 4.2 Persamaan Momentum

Berdasarkan hukum II Newton atau biasa disebut persamaan momentum, yaitu jumlah gaya yang bekerja pada sistem sama dengan besar momentum yang berubah pada sistem. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut (Potter *dkk*, 2012):

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{V} dV = \sum F \quad (4.18)$$

atau dengan menggunakan teorema pengangkutan Reynolds, dapat dinyatakan ke dalam bentuk volume kendali berikut ini:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{V} dV + \int_{cs} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \bar{n} dA = \sum F \quad (4.19)$$

dengan  $\mathbf{V} \cdot \bar{n}$  merupakan besarnya proyeksi kecepatan aliran fluida yang tegak lurus dengan permukaan volume kendali. Bentuk integral permukaan kendali menunjukkan *flux momentum* yang melewati permukaan kendali fluida yang masuk maupun keluar.

Dengan menggunakan langkah yang sama dengan persamaan kontinuitas, didapatkan persamaan momentum dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{V} + \rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = F_p + F_k + F_g \quad (4.20)$$

Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa aliran fluida dalam kondisi tunak (*steady*), yaitu aliran tidak bergantung terhadap waktu ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) dan juga aliran fluida bersifat *incompressible*, yaitu  $\rho$  konstan, maka Persamaan (4.20) menjadi

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = F_p + F_k + F_g \quad (4.21)$$

Dengan  $F_p$  merupakan gaya tekan yang terjadi pada volume kendali,  $F_k$  merupakan gaya kental yang terjadi pada volume kendali, dan  $F_g$  merupakan gaya gravitasi yang terjadi pada volume kendali. Berdasarkan bentuk vektor dari Persamaan (4,21), diperoleh bentuk skalar dari persamaan momentum pada sumbu  $x$  dan  $y$  berikut ini:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + F_y \end{aligned} \quad (4.22)$$

#### 4.2.1 Persamaan Energi

Selain persamaan kontinuitas dan persamaan momentum, pada penelitian ini juga digunakan persamaan energi. Hal tersebut dikarenakan pada aliran konveksi bebas densitas berubah terhadap temperatur. Sesuai dengan hukum pertama Termodinamika yaitu laju perubahan terhadap waktu dari energi yang tersimpan dari suatu sistem sama dengan jumlah dari laju netto dari pertambahan perpindahan energi dari kalor ke dalam sistem dengan laju netto dari pertambahan energi dari usaha yang dipindahkan ke dalam sistem. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut (Munson, 2002):

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \left( \sum \dot{Q}_{out} - \sum \dot{Q}_{in} \right)_{sys} + \left( \sum \dot{W}_{out} - \sum \dot{W}_{in} \right)_{sys} \quad (4.23)$$

atau dapat dinyatakan dengan

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \left( \dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto} \right)_{sys} \quad (4.24)$$

Selanjutnya, berdasarkan teorema pengangkutan Reynolds pada suatu sistem kendali, maka didapatkan persamaan berikut ini:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA \quad (4.25)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.25) ke Persamaan (4.24) didapatkan bentuk persamaan volume kendali dan permukaan kendali untuk hukum pertama Termodinamika sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho (\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}}) dA = \left( \dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto} \right)_{cv} \quad (4.26)$$

Karena dalam penelitian ini benda diasumsikan dalam kondisi tak bergerak (diam), maka tidak terjadi usaha pada sistem. Sehingga mengakibatkan  $\dot{W} = 0$ , maka Persamaan (4.26) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA = (\dot{Q}_{innetto})_{cv} \quad (4.27)$$

atau dalam bentuk persamaan volume kendali, dapat ditulis

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cv} \nabla \cdot (e \rho \mathbf{V}) dV = \int_{cv} \nabla \cdot (k \nabla T) dV + \int_{cv} \dot{q} dV \quad (4.28)$$

Dengan  $\nabla \cdot (k\nabla T)$  adalah konduksi panas yang terjadi pada volume kendali dan  $\dot{q}$  adalah sumber panas (*heat generation*) pada volume kendali. Sehingga Persamaan (4.28) dapat dinyatakan dengan

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e\mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{q} \quad (4.29)$$

berdasarkan sifat divergensi, diketahui bahwa (Sen, 1996):

$$\nabla \cdot (e\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (4.30)$$

selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan kontinuitas yaitu Persamaan (4.16) ke Persamaan (4.30), diperoleh persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot e\mathbf{V} &= \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + 0 \\ &= \mathbf{V} \cdot (\nabla e) \end{aligned}$$

Sehingga Persamaan (4.29) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla e) \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{q} \quad (4.31)$$

Selanjutnya, karena variasi tekanan pada aliran tidak cukup berpengaruh pada termodinamika. Diketahui bahwa hubungan antara spesifik energi internal,  $e$ , dengan spesifik entalpi,  $\hat{h}$  adalah sebagai berikut (Lienhard, 2008):

$$\hat{h} = e + \frac{P}{\rho} \quad (4.32)$$

karena pengaruh dari tekanan fluida dan massa jenis diabaikan, maka perubahan energi dapat didekati dengan perubahan entalpi sebagai berikut:

$$\partial e = \partial \hat{h} - \partial \left( \frac{P}{\rho} \right) \approx \partial \hat{h} \quad (4.33)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (4.33) ke Persamaan (4.31), maka diperoleh persamaan

$$\rho \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \hat{h}) \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{q} \quad (4.34)$$

selanjutnya substitusikan  $\partial \hat{h} \approx C_p \partial T$  ke Persamaan (4.45), sehingga didapat persamaan berikut ini:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (4.35)$$

karena alirannya merupakan aliran konveksi dengan *heat generation*, didefinisikan bahwa

$$\dot{q} = Q_0(T - T_\infty) \quad \text{untuk} \quad T \geq T_\infty \quad (4.36)$$

dengan  $Q_0$  merupakan konstanta *heat generation*, sehingga Persamaan (4.35) menjadi

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_0(T - T_\infty) \quad (4.37)$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot (\nabla T) &= (v_x \hat{i} + v_y \hat{j}) \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} \right) \\ &= \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k \nabla T) &= k \nabla \cdot (\nabla T) \\ &= k \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} \right) \\ &= k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Maka Persamaan (4.37) menjadi

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q_0(T - T_\infty) \quad (4.38)$$

kemudian bagi kedua ruas dengan  $\rho C_p$ , sehingga didapat:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{k}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{Q_0}{\rho C_p} (T - T_\infty) \quad (4.39)$$



karena  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  dan  $\frac{k}{\rho C_p} = \alpha$ , maka pada kondisi *steady* Persamaan (4.39) menjadi

$$\left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p} (T - T_\infty) \quad (4.40)$$

#### 4.2.2 Temperatur Dinding

Pada penelitian ini terjadi perpindahan panas di permukaan silinder eliptik pada aliran konveksi bebas, sehingga menimbulkan temperatur pada dinding silinder ( $\theta_w$ ). Menurut Anwar, *dkk* (2001), persamaan temperatur didefinisikan sebagai berikut:

$$\theta_w = \frac{a q_w}{k(T_w - T_\infty)} \quad (4.41)$$

dengan

$$q_w = T - T_\infty \quad (4.42)$$

kemudian dengan mensubstitusikan Persamaan (4.42) ke Persamaan (4.41), diperoleh persamaan temperatur dinding berikut ini:

$$\theta_w = \frac{a(T - T_\infty)}{k(T_w - T_\infty)} \quad (4.43)$$

dengan mendefinisikan

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (4.44)$$

maka Persamaan (4.43) dapat ditulis

$$\theta_w = \frac{a}{k} \theta \quad (4.45)$$

karena  $\theta_w \cong \theta$ , maka

$$\theta_w = \theta(x, y) \quad (4.46)$$

pada titik stagnasi bawah, yaitu  $x \approx 0$ , didapatkan persamaan dinding sebagai berikut:

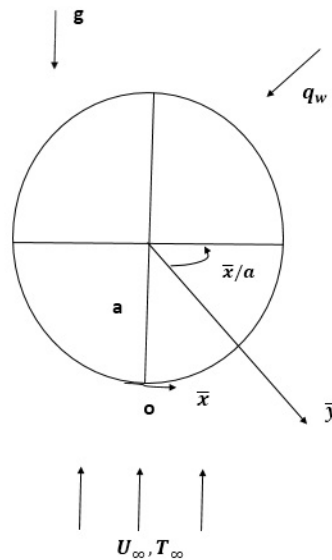
$$\theta_w = \theta(0) \quad (4.47)$$

## BAB V

### PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Bab ini menjelaskan tentang penurunan model matematika yang telah diperoleh dari bab sebelumnya dan tahap-tahap transformasi persamaan dari persamaan dimensional ke persamaan non-dimensional, pengelompokan ke persamaan similaritas, dan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit FTCS.

#### 5.1 Penurunan Persamaan Pembangun



Gambar 5.1: Model fisik dan sistem koordinat silinder sirkular

Persamaan pembangun yang meliputi persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi dibahas pada bab ini. Dalam penelitian sebelumnya (Kasim, 2014) telah dijelaskan mengenai pengaruh fluida viskoelastis pada silinder sirkular dan Gambar 5.1 menunjukkan model fisik dan sistem koordinat dari silinder sirkular tersebut. Berikut ini persamaan-persamaan pembangun yang digunakan pada aliran fluida yang bersifat *steady* dan *incompressible*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \quad (5.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + F_y \quad (5.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p} (T - T_\infty) \quad (5.4)$$

### 5.1.1 Persamaan Momentum

#### A. Persamaan Momentum pada Sumbu x

Berdasarkan Persamaan (5.2), yaitu

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \quad (5.5)$$

terdapat komponen dari tegangan *shear* yaitu  $\tau_{xx}$  dan  $\tau_{yx}$ . Persamaan konstitutif dari variabel Cauchy tegangan *shear* untuk fluida Walter-B didefinisikan sebagai berikut:

$$\tau = \mu_0(2\mathbf{d}) - k_0(2\hat{\mathbf{d}}) \quad (5.6)$$

Pada kasus ini, variabel atas turunan konveksi didefinisikan:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{d}) - (\mathbf{d}) \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \mathbf{V} \cdot (\mathbf{d}) \quad (5.7)$$

atau

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_{ij} &= \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{d}_{ij}) - (\mathbf{d}_{ij})(\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{d}_{ij}) \\ &= \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{d}_{ij}) - \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \mathbf{d}_{im} - \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \mathbf{d}_{mj} \end{aligned} \quad (5.8)$$

dengan  $\mathbf{V} = (u, v, 0)$  merupakan kecepatan, maka komponen tegangan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mu_0(2\mathbf{d}_{ij}) - k_0 \left( \frac{\partial 2\mathbf{d}_{ij}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(2\mathbf{d}_{ij}) - (2\mathbf{d}_{ij}) \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \mathbf{V} \cdot (2\mathbf{d}_{ij}) \right) \\ &= 2\mu(\mathbf{d}_{ij}) - 2k_0 \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{ij}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{d}_{ij}) - (\mathbf{d}_{ij}) \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \mathbf{V} \cdot (\mathbf{d}_{ij}) \right) \end{aligned}$$

pada kondisi *steady* didapat persamaan:

$$\tau_{ij} = 2\mu_0(\mathbf{d}_{ij}) - 2k_0 \left( \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{d}_{ij}) - (\mathbf{d}_{ij}) \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \mathbf{V} \cdot (\mathbf{d}_{ij}) \right) \quad (5.9)$$

dengan  $\mathbf{d}_{ij}$  didefinisikan:

$$\mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \right] \quad i = x, y; \quad j = x, y \quad (5.10)$$

Dengan menggunakan Persamaan (5.9) dan (5.10), didapat komponen tegangan geser sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{d}_{ii} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \mathbf{d}_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \mathbf{d}_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{d}_{jj} \right) \right] \\ &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\ &= 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

maka diperoleh nilai dari  $\tau_{xx}$  adalah

$$\tau_{xx} = 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right], \quad (5.11)$$

dengan cara yang sama, dicari nilai dari  $\tau_{yx}$ . Karena  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  (Lampiran 1), sehingga didapat persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{d}_{ii} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \mathbf{d}_{ij} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \mathbf{d}_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{d}_{jj} \right) \right] \\ &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = & \mu_0 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] - 2k_0 \left[ \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.17) yaitu persamaan kontinuitas, maka diperoleh nilai dari  $\tau_{xy}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = & \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (5.12)\end{aligned}$$

Kemudian lakukan penurunan pada Persamaan (5.11) terhadap sumbu x sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xx}}{\partial x} = & 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2k_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \right. \\ & \left. 2 \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \right]\end{aligned}$$

sehingga didapat persamaan

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_0 \left[ -6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right], \quad (5.13)$$

dengan cara yang sama, lakukan penurunan untuk Persamaan (5.12) terhadap sumbu y seperti berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = & \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 2k_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + \right. \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right]\end{aligned}$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = & \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ & \left. v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \right.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (5.14)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (5.13) dan (5.14) ke Persamaan (5.5), diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left( 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_0 \left[ -6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \right) + \left( \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\ &\quad k_0 \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \right. \\ &\quad \left. \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_x \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \\ &\quad k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + v \left( 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left( 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \\ &\quad \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \\ &\quad k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + u \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + v \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \end{aligned}$$

karena sesuai dengan persamaan kontinuitas, yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

atau dapat ditulis

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

sehingga persamaan momentum ke arah sumbu x adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\ & v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\ & \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{1}{\rho} F_x \end{aligned} \quad (5.15)$$

karena gaya yang bekerja pada kasus ini adalah gaya gravitasi, maka didefinisikan  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$ , dengan  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$  dan  $\mathbf{g} = (-g_x, -g_y, 0)$ , maka Persamaan (5.15) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x \end{aligned} \quad (5.16)$$

(5.17)

## B. Persamaan Momentum pada Sumbu y

Pada Persamaan (5.3) telah diketahui persamaan awal momentum pada sumbu y. Terdapat komponen tegangan geser yaitu  $\tau_{xy}$  dan  $\tau_{yy}$ . Sama halnya dengan langkah yang dilakukan terhadap persamaan momentum pada sumbu x, diperoleh persamaan-persamaan tegangan geser sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau_{yy} = & 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{d}_{ji} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \mathbf{d}_{jj} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \mathbf{d}_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{d}_{jj} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yy} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) - \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

maka diperoleh persamaan

$$\tau_{yy} = 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.18)$$

Kemudian dilakukan penurunan pada Persamaan (5.12) terhadap sumbu x dan Persamaan (5.18) terhadap sumbu y, sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[ \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \right. \\
&\quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \\
&\quad \left. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (5.19)
\end{aligned}$$

dan

$$\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left[ 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (5.20)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (5.19) dan (5.20) ke Persamaan (5.3)



diperoleh persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned}
\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \left( \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[ \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\
&\quad \left. \left. v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \Bigg) + \\
&\quad \left( 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left[ 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right) + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \\
&\quad k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + u \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + v \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\
&\quad \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \left( 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_y
\end{aligned}$$

karena sesuai dengan persamaan kontinuitas, yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

atau dapat ditulis

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

sehingga didapat persamaan momentum terhadap sumbu y sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
& v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\
& \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{\rho} F_y
\end{aligned} \quad (5.21)$$

karena gaya yang bekerja pada kasus ini adalah gaya gravitasi, maka didefinisikan  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$ , dengan  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$  dan  $\mathbf{g} = (-g_x, -g_y, 0)$ , maka Persamaan (5.21) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
& v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\
& \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - g_y
\end{aligned} \quad (5.22)$$

### C. Persamaan Lapisan Batas

Persamaan momentum pada Persamaan (5.17) dan (5.22) tidak mudah untuk diselesaikan. Oleh karena itu, dibutuhkan konsep teori lapisan batas (Prandtl, 1904). Dari teori tersebut, persamaan Navier-Stokes yang kompleks dapat disederhanakan dengan melakukan pendekatan yang disebut persamaan lapisan batas (Bejan, 2004). Persamaan lapisan batas pada momentum diperoleh dari proses penyederhanaan sesuai dengan besarnya permintaan di setiap masing-masing persamaan. Proses penyederhanaan menggunakan konsep lapisan batas ditunjukkan oleh Ozisik (1985) dan Kasim (2014). Selanjutnya, Persamaan (5.17) dan (5.22) diukur dalam bentuk 1 dan  $\Delta$  sebagai berikut:

$$u \sim 1, x \sim 1, v \sim \Delta, y \sim \Delta, \frac{k_0}{\rho} \sim \Delta^2, \frac{\mu_0}{\rho} \sim \Delta^2, g \sim 1 \quad (5.23)$$

sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\
& \left. + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x
\end{aligned}$$

dengan mengganti  $\frac{\mu_0}{\rho} = \nu$ , maka didapat persamaan

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x$$

Akibat dari proses penyederhanaan dengan teori persamaan lapisan batas, persamaan momentum pada sumbu y dapat diabaikan (Lampiran 4). Maka persamaan momentum yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x \quad (5.24)$$

Pada aliran konveksi bebas, tekanan ( $P$ ) pada Persamaan (5.24) merupakan kombinasi dari tekanan hidrostatik ( $Ph$ ) dan tekanan dinamis ( $Pd$ ) (Leal, 1992). Maka tekanan ( $P$ ) dapat ditulis:

$$P = Ph + Pd$$

Tekanan  $Ph$  merupakan tekanan hidrostatik pada medium tak gerak (diam). Sehingga besar gravitasi yang diberikan  $\nabla Ph = \rho_\infty g$ , dengan  $\rho_\infty$  adalah densitas fluida. Oleh karena  $g$  bergerak ke bawah dan sumbu  $x$  ke atas, maka besarnya tekanan adalah sebagai berikut (Kays et al., 2005):

$$\frac{\partial Ph}{\partial x} = -\rho_\infty g_x \quad (5.25)$$

sehingga Persamaan (5.24) dapat ditulis:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial Pd}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g_x \frac{1}{\rho} (\rho_\infty - \rho) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \quad (5.26)$$

Pada Persamaan (5.26) ditunjukkan bahwa tekanan hidrostatik dengan gaya benda pada fluida menggambarkan pergerakan fluida. Menurut Merkin dan Pop (1988), tekanan dinamis diasumsikan kecil, sehingga dapat diabaikan.

Berdasarkan pendekatan Boussinesq, semua variabel berpengaruh kecuali untuk

densitas pada persamaan momentum yang diabaikan. Pendekatan ini digunakan untuk mendekati perbedaan densitas yang menyebabkan aliran akibat interaksi antara gaya gravitasi benda dan tekanan hidrostatik, seperti pengaruh temperatur. Menurut Leal (1992), nilai maksimum dari  $(T - T_\infty)$  diasumsikan kecil dan sesuai dengan deret Taylor didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2 \quad (5.27)$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho} = \beta(T - T_\infty) \quad (5.28)$$

dan percepatan gravitasi yang digunakan adalah:

$$g_x = -g \sin\left(\frac{x}{a}\right) \quad (5.29)$$

dengan  $a$  adalah radius silinder.

Dengan mensubstitusikan Persamaan (5.28) dan (5.29) ke Persamaan (5.26), didapatkan persamaan momentum untuk aliran lapisan batas konveksi bebas pada kondisi tunak (*steady*) yang melalui silinder adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T - T_\infty) \sin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\ \left. v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

### 5.1.2 Persamaan Energi

Berdasarkan penurunan rumus pada Bab IV, yaitu pada Persamaan (4.40), diperoleh persamaan energi sebagai berikut:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p} (T - T_\infty) \quad (5.31)$$

Sehingga pada persamaan bentuk dimensional, yaitu pada persamaan kontinuitas (5.1), persamaan momentum (5.30), dan persamaan energi (5.31) yang dilambangkan dengan notasi  $' - '$ , maka diperoleh persamaan pembangun berikut ini:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + g\beta(\bar{T} - \bar{T}_\infty) \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) \right. \\ \left. + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p} (\bar{T} - \bar{T}_\infty) \quad (5.34)$$

dan diberikan kondisi batas:

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -\frac{q_w}{k} \quad \text{untuk} \quad \bar{y} = 0, \\ \bar{u} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \bar{T} = \bar{T}_\infty \quad \text{untuk} \quad \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.35)$$

dengan koordinat kartesius  $\bar{x}$  diukur sepanjang permukaan silinder mulai dari titik stagnasi bawah silinder dan koordinat  $\bar{y}$  diukur normal terhadap permukaan silinder.  $\bar{u}$  dan  $\bar{v}$  merupakan komponen kecepatan sepanjang sumbu  $\bar{x}$  dan  $\bar{y}$ . Pada kasus ini,  $Q_0$  konstan, boleh bernilai positif atau negatif, yaitu  $Q_0 > 0$  untuk *heat generation* dan  $Q_0 < 0$  untuk *heat absorption*.

Kemudian dilakukan transformasi dari persamaan pembangun dimensional pada Persamaan (5.32) sampai (5.34) ke bentuk non-dimensional. Berikut variabel-variabel non-dimensional yang digunakan:

$$\begin{aligned} v = \frac{a}{\nu} Gr^{-1/4} \bar{v}, \quad \theta = \bar{T} - \bar{T}_\infty / q_w a / k \\ x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = Gr^{1/4} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right), \quad u = \frac{a}{\nu} Gr^{-1/2} \bar{u} \end{aligned} \quad (5.36)$$

dengan  $Gr = g\beta(aq_w/k)a^3/\nu^2$ . Substitusikan Persamaan (5.36) ke Persamaan (5.32) sampai (5.34), sehingga diperoleh persamaan berikut ini:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.37)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \theta \sin x \quad (5.38)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta \quad (5.39)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (5.35) dan Persamaan (5.36), diperoleh kondisi batas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad \theta' = -1 \quad \text{untuk} \quad y = 0 \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{untuk} \quad y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.40)$$

dengan  $Pr, K$  dan  $\gamma$  adalah parameter dimensional untuk bilangan Prandtl, nilai kekentalan (*viscoelastic value*), dan *heat generation*, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad K = \frac{k_0 Gr^{1/2}}{\rho a^2}, \quad \gamma = \frac{a^2 Q_0}{\nu \rho C_p Gr^{1/2}} \quad (5.41)$$

Selanjutnya menyelesaikan Persamaan (5.37) sampai (5.39) dengan memperhatikan kondisi batas pada Persamaan (5.40) dan variabel berikut:

$$\psi = x f(x, y), \quad \theta = \theta(x, y), \quad (5.42)$$

dengan  $\psi$  adalah fungsi aliran yang didefinisikan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.43)$$

dengan melakukan substitusi pada Persamaan (5.42) dan (5.43) ke Persamaan (5.37) sampai (5.39), diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \frac{\theta \sin(x)}{x} - \\ Kx \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) - \\ K \left( 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y} + \gamma \theta - x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.45)$$

dengan kondisi batas yang diperoleh dari hasil substitusi Persamaan (5.42) dan (5.43) ke Persamaan (5.40) berikut ini:

$$f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \theta' = -1 \quad \text{untuk} \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{untuk} \quad y \rightarrow \infty \quad (5.46)$$

Pada titik stagnasi bagian terdekat dengan *blunt body* ( $x \approx 0$ ) dan sesuai dengan kondisi batas pada Persamaan (5.46), maka Persamaan (5.44) dan (5.45) dapat dinyatakan dengan

$$f''' + f f'' - (f')^2 + \theta - K(2f' f''' - f f^{(4)} - (f'')^2) = 0, \quad (5.47)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' + \gamma \theta = 0, \quad (5.48)$$

dengan kondisi batas:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \theta'(0) = -1$$

$$f'(\infty) = 0 \quad f''(\infty) = 0, \quad \theta(\infty) = 0, \quad (5.49)$$

dengan tanda (') menunjukkan turunan terhadap  $y$ , sedangkan kuantitas fisik dalam kasus ini adalah koefisien *skin friction* ( $C_f$ ) dan temperatur dinding ( $\theta_w$ ). Kedua kuantitas tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \quad \text{dan} \quad \theta_w = \frac{a q_w}{k(T_w - T_\infty)} \quad (5.50)$$

dengan

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} + k_0 \left( \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{v} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0}, \quad q_w = -k \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} \quad (5.51)$$

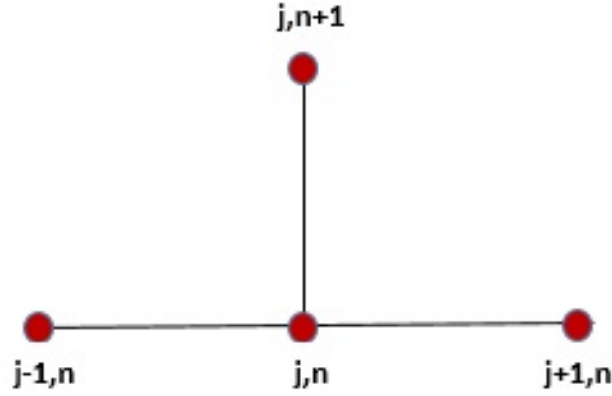
dengan mensubstitusikan variabel pada Persamaan (5.36) dan kondisi batas pada Persamaan (5.35) ke Persamaan (5.51) dan mensubstitusikanya kembali ke Persamaan (5.50), maka diperoleh:

$$C_f = x f''(x, 0), \quad \text{dan} \quad \theta_w = \theta(x, 0) \quad (5.52)$$

## 5.2 Skema Numerik Metode Beda Hingga Eksplisit

Pada penelitian ini, metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan model matematika adalah metode beda hingga eksplisit FTCS. Pada Gambar 5.2 ditunjukkan skema numerik dari metode beda hingga eksplisit FTCS. Berdasarkan Persamaan (5.47), dilakukan proses numerik sebagai berikut:

$$f' = p$$



Gambar 5.2: Skema Beda Hingga Eksplisit FTCS

$$f = p\Delta y \quad (5.53)$$

Sehingga Persamaan (5.47) dapat dinyatakan dengan:

$$p'' + p\Delta y p' - p^2 + \theta - K(2pp'' - p\Delta y p''' - (p')^2) = 0 \quad (5.54)$$

Berikut skema beda hingga yang digunakan dalam proses diskritisasi pada Persamaan (5.54):

Skema beda hingga pusat untuk turunan pertama:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (5.55)$$

Skema beda hingga pusat untuk turunan kedua:

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (5.56)$$

Skema beda hingga pusat untuk turunan ketiga:

$$\left. \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+2} - 2p_{i+1} + 2p_{i-1} - p_{i-2}}{2\Delta y^3} + O(\Delta y^2) \quad (5.57)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (5.55) sampai (5.57) ke Persamaan (5.54), maka diperoleh pendiskritan persamaan berikut ini:

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta y^2} + p_i \Delta y \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta y} - p_i^2 + \theta - K \left( 2p_i \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta y^2} - \right.$$



$$p_i \Delta y \frac{p_{i+2} - 2p_{i+1} + 2p_{i-1} - p_{i-2}}{2\Delta y^3} - \left( \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta y} \right)^2 = 0 \quad (5.58)$$

misal:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta y^2} \quad (5.59)$$

dengan melakukan substitusi Persamaan (5.59) ke Persamaan (5.58), maka didapat:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) + \frac{1}{2}p_i(p_{i+1} - p_{i-1}) - p_i^2 + \theta_i - 2K\mathbf{A}p_i(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) + \\ & \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i(p_{i+2} - p_{i+1} + p_{i-1} - p_{i-2}) + \frac{1}{4}K\mathbf{A}(p_{i+1}^2 - 2p_{i+1}p_{i-1} + p_{i-1}^2) = 0 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} p_i^2 &= \mathbf{A}(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) + \frac{1}{2}p_i(p_{i+1} - p_{i-1}) + \theta_i - 2K\mathbf{A}p_i(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) + \\ & \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i(p_{i+2} - p_{i+1} + p_{i-1} - p_{i-2}) + \frac{1}{4}K\mathbf{A}(p_{i+1}^2 - 2p_{i+1}p_{i-1} + p_{i-1}^2) \\ &= \mathbf{A}p_{i+1} - 2\mathbf{A}p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_i p_{i+1} - \frac{1}{2}p_i p_{i-1} + \theta_i - 2K\mathbf{A}p_i p_{i+1} + 4K\mathbf{A}p_i^2 - \\ & 2K\mathbf{A}p_i p_{i-1} + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i+1} + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i-1} - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i-2} + \\ & \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i-1}^2 \\ &= \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{2}K\mathbf{A} \right) p_i p_{i+1} + \left( -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}K\mathbf{A} \right) p_i p_{i-1} + \theta_i + \\ & 4K\mathbf{A}p_i^2 + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i-1}^2 \end{aligned}$$

dengan melakukan pengelompokan variabel  $p_i^2$ , didapatkan persamaan:

$$\begin{aligned} (1 - 4K\mathbf{A})p_i^2 &= \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + (1 - 3K\mathbf{A})p_i p_{i+1} + \\ & (-1 - K\mathbf{A})p_i p_{i-1} + \theta_i + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i-2} + \\ & \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i-1}^2 \end{aligned}$$

misal:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}K\mathbf{A}, \quad \mathbf{C} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}K\mathbf{A}, \quad \mathbf{D} = K\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = 1 - 4K\mathbf{A} \quad (5.60)$$

sehingga diperoleh

$$p_i^2 = \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1} p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E}$$

atau dapat ditulis

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1} p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.61)$$

Selanjutnya dilakukan proses iterasi dengan menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, M$ , sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:

**Saat i=1**

Sesuai dengan kondisi batas pada Persamaan (5.49), maka nilai dari  $p_{i-1} = 0$  dan  $p_{i-2} = p_i$ . Sehingga Persamaan (5.61) dapat dinyatakan dengan

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \theta_i + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_i + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Saat i=2**

Dengan mensubstitusikan nilai  $p_{i-2} = 0$ , maka diperoleh persamaan

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1} p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Saat i=M-1**

Dengan mensubstitusikan nilai  $p_{i+2} = p_i$ , diperoleh persamaan

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_i - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1} p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Saat i=M**

Dengan mensubstitusikan nilai  $p_{i+2} = p_i$  dan  $p_{i+1} = p_{i-1}$ , maka diperoleh persamaan

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

sedangkan untuk persamaan energi:

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta y^2} \right) + f_i \left( \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta y} \right) + \gamma\theta_i = 0$$

misal:

$$r_1 = \frac{1}{Pr\Delta y^2}, \quad r_2 = \frac{1}{2\Delta y} \quad (5.62)$$

sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} r_1(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) + r_2 f_i(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) + \gamma\theta_i &= 0 \\ r_1\theta_{i+1} - 2r_1\theta_i + r_1\theta_{i-1} + r_2 f_i\theta_{i+1} - r_2 f_i\theta_{i-1} + \gamma\theta_i &= 0 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\theta_i = \frac{(r_1 + r_2 f_i)\theta_{i+1} + (r_1 - r_2 f_i)\theta_{i-1}}{(2r_1 - \gamma)} \quad (5.63)$$

Selanjutnya dilakukan iterasi dengan memperhatikan kondisi batas pada Persamaan (5.49).

**Saat i=1**

Ubah  $\theta_{i-1}$  dengan  $\theta_{i+1} + 2\Delta y$ , sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\theta_i = \frac{(r_1 + r_2 f_i)\theta_{i+1} + (r_1 - r_2 f_i)\theta_{i+1} + 2\Delta y}{(2r_1 - \gamma)}$$

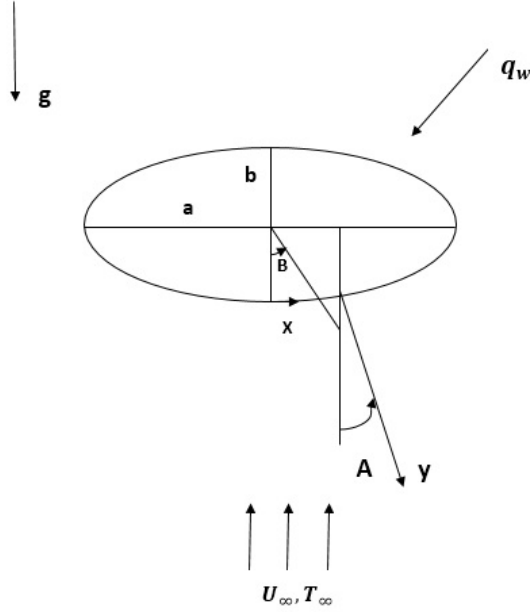
**Saat i=M**

Ubah  $\theta_{i+1}$  dengan 0, maka didapat:

$$\theta_i = \frac{(r_1 - r_2 f_i)\theta_{i-1}}{(2r_1 - \gamma)}$$

### 5.3 Penyelesaian Model Matematika untuk Silinder Eliptik

Pada kasus dengan media silinder eliptik, terdapat panjang sumbu  $a$  dan  $b$  yang berbeda. Gambar 5.3 menunjukkan model fisik dan sistem koordinat dari silinder eliptik. Gambar tersebut juga menjelaskan bahwa aliran fluida mengalir dari



Gambar 5.3: Model fisik dan sistem koordinat silinder eliptik

bawah ke atas, sehingga terdapat pengaruh gaya gravitasi. Silinder eliptik tersebut mempunyai panjang sumbu  $a$  dan panjang sumbu  $b$ . Sedangkan  $A$  adalah sudut yang dibentuk oleh garis normal bagian luar (*outward*) dari silinder dengan garis vertikal bagian lengkung bawah (*downward*). Berdasarkan gambar sistm koordinat tersebut, maka dapat didefinisikan (Cheng,2012):

$$g_x = -g \sin A \quad (5.64)$$

dengan

$$\sin A = \frac{b}{a} \frac{\sin B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.65)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (5.28) dan (5.65) ke Persamaan (5.26), didapat persamaan berikut ini:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T - T_\infty) \sin A - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + \right.$$

$$v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Bigg]$$

Pada bentuk dimensional, dapat ditulis

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + g\beta(\bar{T} - \bar{T}_\infty) \sin A - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) \right. \\ \left. + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.66)$$

dengan kondisi batas:

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -\frac{q_w}{k} \quad \text{untuk} \quad \bar{y} = 0, \\ \bar{u} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \bar{T} = \bar{T}_\infty \quad \text{untuk} \quad \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.67)$$

selanjutnya ditransformasikan ke bentuk non-dimensional dengan memperhatikan variabel-variabel non-dimensional pada Persamaan (5.36), diperoleh persamaan

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \theta \sin A \quad (5.68)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad \theta' = -1 \quad \text{untuk} \quad y = 0 \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{untuk} \quad y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.69)$$

Selanjutnya ditransformasikan ke dalam bentuk fungsi aliran (*stream function*) sebagai berikut:

$$\psi = x f(x, y), \quad \theta = \theta(x, y), \quad (5.70)$$

dengan  $\psi$  adalah fungsi aliran yang didefinisikan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.71)$$

sehingga didapat persamaan

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \theta \sin A -$$

$$Kx \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) - K \left( 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (5.72)$$

dengan kondisi batas:

$$f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \theta' = -1 \quad \text{untuk} \quad y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{untuk} \quad y \rightarrow \infty \quad (5.73)$$

Sehingga pada titik stagnasi bagian terdekat dengan *blunt body*, dapat diasumsikan bahwa  $x \approx 0$ , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$f''' + f f'' - (f')^2 + \theta \sin A - K(2f' f''' - f f^{(4)} - (f'')^2) = 0, \quad (5.74)$$

dengan kondisi batas:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \theta'(0) = -1 \\ f'(\infty) = 0, \quad f''(\infty) = 0, \quad \theta(\infty) = 0, \quad (5.75)$$

### 5.3.1 Penyelesaian Numerik

Sama halnya dengan model matematika dari silinder sirkular, yaitu dilakukan diskritisasi menggunakan metode beda hingga eksplisit FTCS.

$$f' = p \\ f = p \Delta y \quad (5.76)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (5.76) ke Persamaan (5.74), diperoleh persamaan

$$p'' + p \Delta y p' - p^2 + \theta \sin A - K(2p p'' - p \Delta y p''' - (p')^2) = 0 \quad (5.77)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi Persamaan (5.55) sampai (5.57) ke Persamaan (5.77), sehingga didapatkan diskritisasi persamaan berikut ini:

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta y^2} + p_i \Delta y \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta y} - p_i^2 + \theta_i \sin A - K \left( 2p_i \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta y^2} - \right.$$

$$p_i \Delta y \frac{p_{i+2} - 2p_{i+1} + 2p_{i-1} - p_{i-2}}{2\Delta y^3} - \left( \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta y} \right)^2 = 0 \quad (5.78)$$

misal:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta y^2} \quad (5.79)$$

dengan melakukan substitusi Persamaan (5.79) ke Persamaan (5.78), maka didapat:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) + \frac{1}{2}p_i(p_{i+1} - p_{i-1}) - p_i^2 + \theta_i \sin A - 2K\mathbf{A}p_i(p_{i+1} - \\ & 2p_i + p_{i-1}) + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i(p_{i+2} - p_{i+1} + p_{i-1} - p_{i-2}) + \frac{1}{4}K\mathbf{A}(p_{i+1}^2 - \\ & 2p_{i+1}p_{i-1} + p_{i-1}^2) = 0 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} p_i^2 &= \mathbf{A}(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) + \frac{1}{2}p_i(p_{i+1} - p_{i-1}) + \theta_i \sin A - 2K\mathbf{A}p_i(p_{i+1} - \\ & 2p_i + p_{i-1}) + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i(p_{i+2} - p_{i+1} + p_{i-1} - p_{i-2}) + \frac{1}{4}K\mathbf{A}(p_{i+1}^2 - \\ & 2p_{i+1}p_{i-1} + p_{i-1}^2) \\ &= \mathbf{A}p_{i+1} - 2\mathbf{A}p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_i p_{i+1} - \frac{1}{2}p_i p_{i-1} + \theta_i \sin A - 2K\mathbf{A}p_i p_{i+1} + \\ & 4K\mathbf{A}p_i^2 - 2K\mathbf{A}p_i p_{i-1} + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i+1} + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i-1} - \\ & \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i-1}^2 \\ &= \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{2}K\mathbf{A} \right) p_i p_{i+1} + \left( -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}K\mathbf{A} \right) p_i p_{i-1} + \\ & \theta_i \sin A + 4K\mathbf{A}p_i^2 + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i+1}^2 - \\ & \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i-1}^2 \end{aligned}$$

dengan melakukan pengelompokan variabel  $p_i^2$ , didapatkan persamaan:

$$\begin{aligned} (1 - 4K\mathbf{A})p_i^2 &= \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{2}K\mathbf{A} \right) p_i p_{i+1} + \\ & \left( -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}K\mathbf{A} \right) p_i p_{i-1} + \theta_i \sin A + \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_i p_{i-2} + \\ & \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}K\mathbf{A}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}K\mathbf{A}p_{i-1}^2 \end{aligned}$$

misal:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}K\mathbf{A}, \quad \mathbf{C} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}K\mathbf{A}, \quad \mathbf{D} = K\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = 1 - 4K\mathbf{A} \quad (5.80)$$

sehingga diperoleh

$$p_i^2 = \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i \sin A + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E}$$

atau dapat ditulis

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i \sin A + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.81)$$

Selanjutnya dilakukan proses iterasi dengan menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, M$ , sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:

**Saat i=1**

Sesuai dengan kondisi batas pada Persamaan (5.75), maka nilai dari  $p_{i-1} = 0$  dan  $p_{i-2} = p_i$ . Sehingga Persamaan (5.81) dapat ditulis:

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \theta_i \sin A + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_i + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Saat i=2**

Dengan mensubstitusikan nilai  $p_{i-2} = 0$ , maka diperoleh persamaan:

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i \sin A + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$



### Saat $i=M-1$

Dengan mensubstitusikan nilai  $p_{i+2} = p_i$ , diperoleh persamaan:

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i \sin A + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_i - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

### Saat $i=M$

Dengan mensubstitusikan nilai  $p_{i+2} = p_i$  dan  $p_{i+1} = p_{i-1}$ , maka diperoleh persamaan:

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i \sin A + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

---

### Algorithm 1 Algoritma Penyelesaian Numerik dengan Menggunakan Matlab

---

**Set Input:** nilai variasi parameter, ketebalan lapisan batas ( $\Delta y$ ), panjang ketebalan lapisan batas ( $y$ ).

**procedure**

Kondisi awal  $p(i), f(i)$ , dan  $\theta(i)$

**for**  $it_{max} = 1$  sampai 5000 **do**

**for**  $i = 1$  sampai  $M$  **do**

$$p_i = \left( \left( \mathbf{A}p_{i+1} + (-2\mathbf{A})p_i + \mathbf{A}p_{i-1} + \mathbf{B}p_i p_{i+1} + \mathbf{C}p_i p_{i-1} + \theta_i \sin A + \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i+2} - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_i p_{i-2} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}p_{i+1}p_{i-1} + \frac{1}{4}\mathbf{D}p_{i-1}^2 \right) / \mathbf{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\theta_i = ((r_1 + r_2 f_i)\theta_{i+1} + (r_1 - r_2 f_i)\theta_{i-1}) / ((2r_1 - \gamma))$$

**if**  $i = 1$  **then**

$p_{i-1} \leftarrow 0$

$p_{i-2} \leftarrow p_i$

$\theta_{i-1} \leftarrow \theta_{i+1} + 2\Delta y$

**if**  $i = 2$  **then**

$p_{i-2} \leftarrow 0$

**if**  $i = M - 1$  **then**

$p_{i+2} \leftarrow p_i$

**if**  $i = M$  **then**

$p_{i+1} \leftarrow p_{i-1}$

$p_{i+2} \leftarrow p_i$

$\theta_{i+1} \leftarrow 0$

**end if**

**end if**

**end if**

**end if**

**end for**

**end for**

**end procedure**

---

#### 5.4 Algoritma

Pada penelitian ini digunakan penyelesaian numerik untuk menyelesaikan permasalahan dari model matematika yang telah didapatkan sebelumnya. Algoritma yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan ini dijelaskan pada **Algorithm 1**.

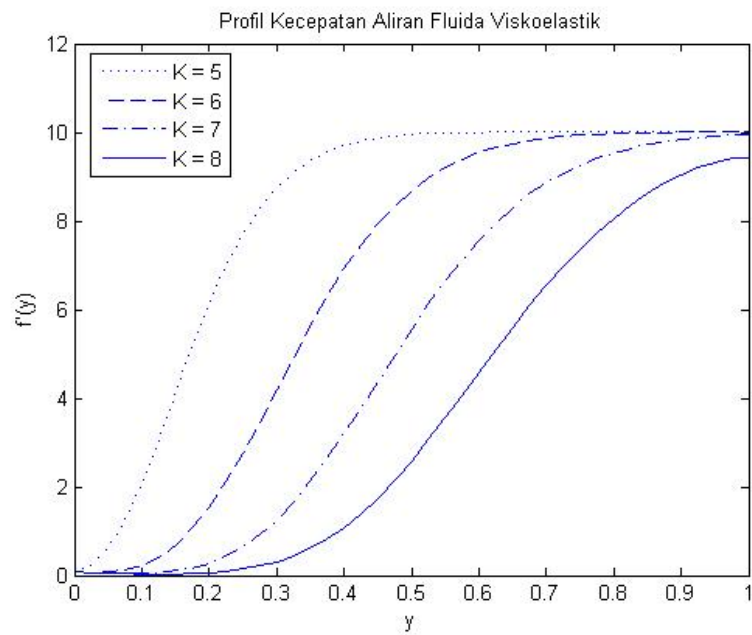
#### 5.5 Hasil Numerik

Tabel 5.1: Nilai temperatur dinding pada titik stagnasi ( $x \approx 0$ ) dengan variasi bilangan Prandtl ketika  $K = 0$  dan  $\gamma = 1$

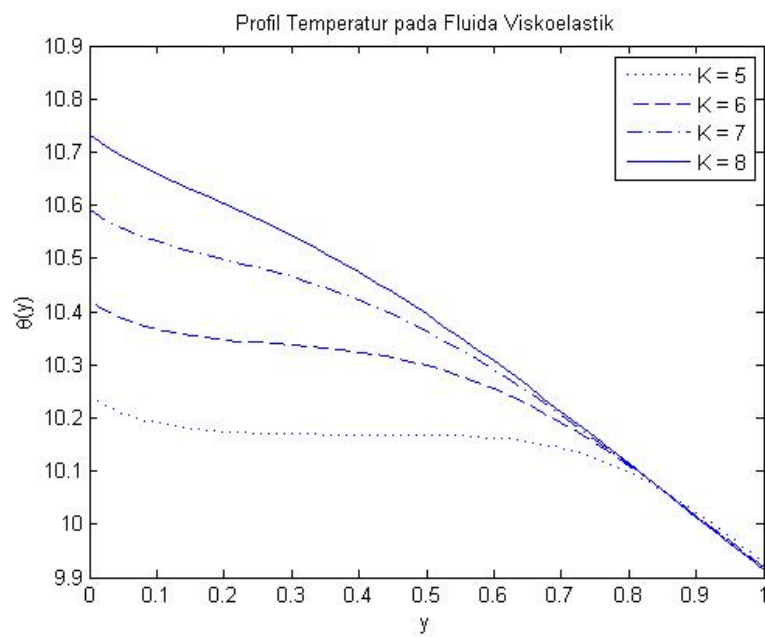
Pr	Nilai $\theta(0)$		
	Salleh dan Nazar (2010)	Sarif (2013)	Annisa (2015)
0.5	92.1979	92.1980	92.1367
1	35.4701	35.4701	35.4422
2	15.7804	15.7803	15.7655
3	10.5357	10.5357	10.5141

Pada bagian ini, ditunjukkan profil temperatur dan kecepatan aliran fluida dengan variasi bilangan Prandtl, parameter sumber panas (*heat generation*), nilai viskoelastik, dan panjang sumbu silinder. Tabel 5.1 menunjukkan nilai temperatur dinding ( $\theta_w$  pada titik stagnasi ( $x \approx 0$ ) dengan  $K = 0$  dan  $\gamma = 1$  yang dihasilkan dari penelitian ini dan hasil yang diperoleh dari penelitian sebelumnya yaitu penelitian Salleh dan Nazar (2010) dan Sarif (2013). Berdasarkan hasil penelitian ini, saat  $Pr = 0.5$  nilai dari temperatur dindingnya 92.1367, sedangkan hasil dari Salleh dan Nazar adalah 92.1979 dan hasil dari Sarif adalah 92.1980. Terdapat selisih nilai  $\pm 0.06$  dikarenakan penelitian ini menggunakan beda hingga order kedua, sedangkan penelitian Salleh dan Sarif menggunakan beda hingga order pertama.

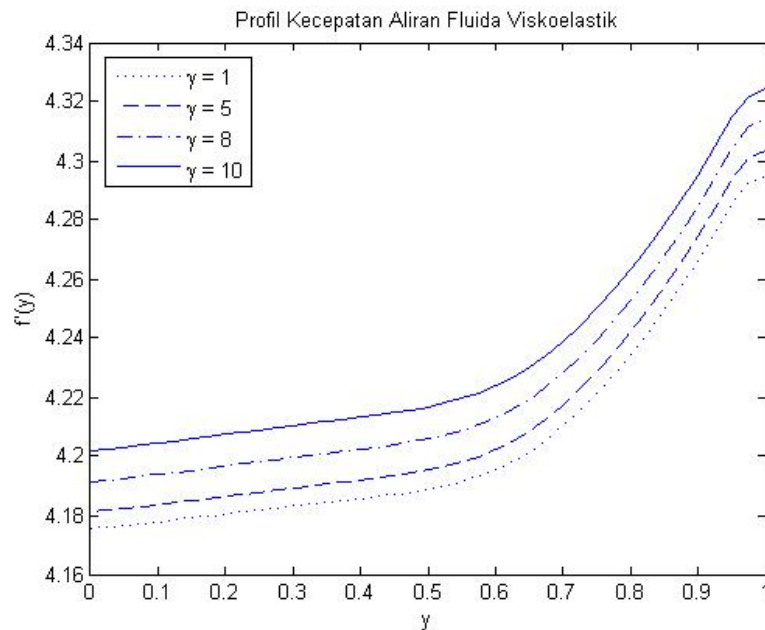
Selanjutnya dijelaskan mengenai hasil distribusi temperatur dan kecepatan yang terjadi pada titik stagnasi yang terdekat dengan dinding silinder eliptik. Gambar 5.4 dan 5.5 menunjukkan tentang profil kecepatan dan temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai viskos, yaitu  $K = 5, 6, 7, 8$  dengan nilai  $\gamma = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $a = 10$ , dan  $b = 5$ . Gambar 5.4 menunjukkan kecepatan berkurang seiring dengan bertambahnya nilai viskos ( $K$ ). Hal tersebut dikarenakan timbulnya gaya gesek antara dinding benda dan fluida yang dapat menghambat aliran fluida, sehingga semakin besar nilai  $K$ , semakin berkurang kecepatan yang dihasilkan. Besar kecepatan maksimumnya mencapai 12. Sedangkan Gambar 5.5 yaitu tentang profil temperatur fluida menyimpulkan bahwa distribusi temperatur



Gambar 5.4: Profil kecepatan aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai viskos



Gambar 5.5: Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai viskos

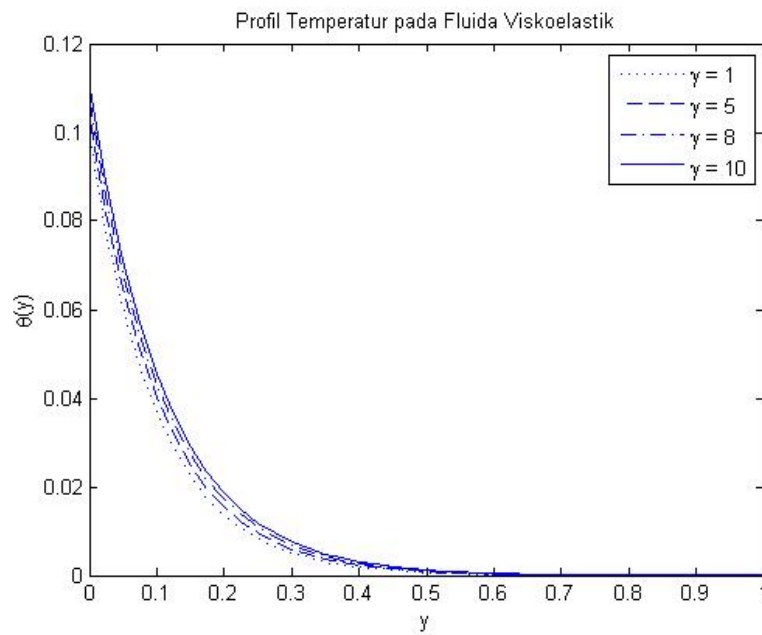


Gambar 5.6: Profil kecepatan pada fluida viskoelastik dengan variasi parameter pembentukan panas ( $\gamma$ )

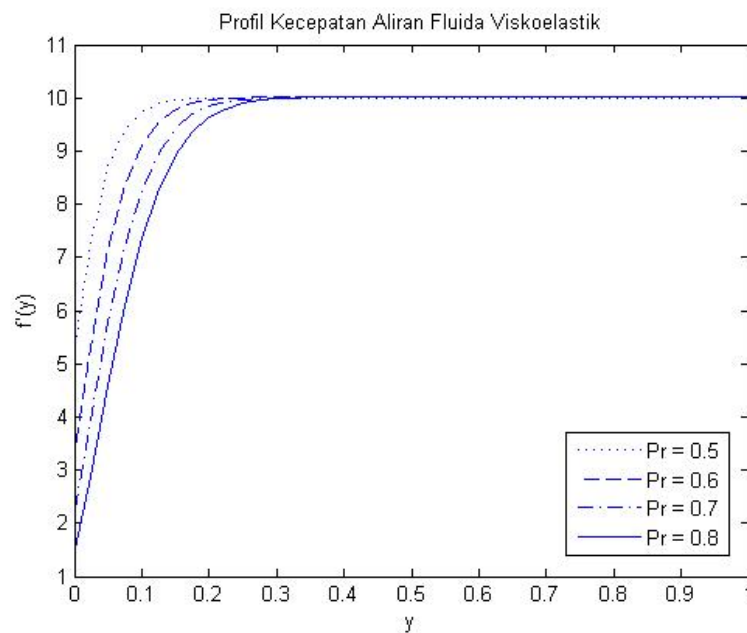
fluida meningkat ketika nilai viskosnya bertambah dengan nilai maksimum 10.9. Hal tersebut disebabkan karena pengaruh dari gaya gesek yang dihasilkan antara dinding benda dan fluida yang dapat menimbulkan panas, sehingga semakin besar nilai  $K$ , temperatur yang dihasilkan semakin besar.

Gambar 5.6 dan 5.7 menunjukkan profil kecepatan dan temperatur fluida dengan variasi parameter sumber panas (*heat generation*) yaitu  $\gamma = 1, 5, 8, 10$  dengan nilai  $Pr = 0.5$ ,  $K = 0.2$ ,  $a = 10$ , dan  $b = 5$ . Gambar 5.6 menunjukkan bahwa semakin besar parameter sumber panas, semakin meningkat pula kecepatannya. Kecepatan maksimum yang dihasilkan adalah 4.34. Sama halnya dengan profil kecepatan, pada profil temperatur didapatkan hasil seperti Gambar 5.7 yaitu semakin besar parameter sumber panasnya, semakin meningkat pula temperatur yang dihasilkan. Diketahui bahwa besar temperatur maksimumnya adalah 0.12. Hal tersebut disebabkan karena bertambahnya parameter sumber panas, mengakibatkan densitas fluida berkurang sehingga kecepatannya bertambah. Selain itu, juga karena terjadi perpindahan panas pada fluida dan benda, yang dapat mengakibatkan penambahan suhu dari parameter sumber panas tersebut, sehingga secara otomatis temperatur yang dihasilkan semakin bertambah seiring dengan bertambahnya nilai  $\gamma$ .

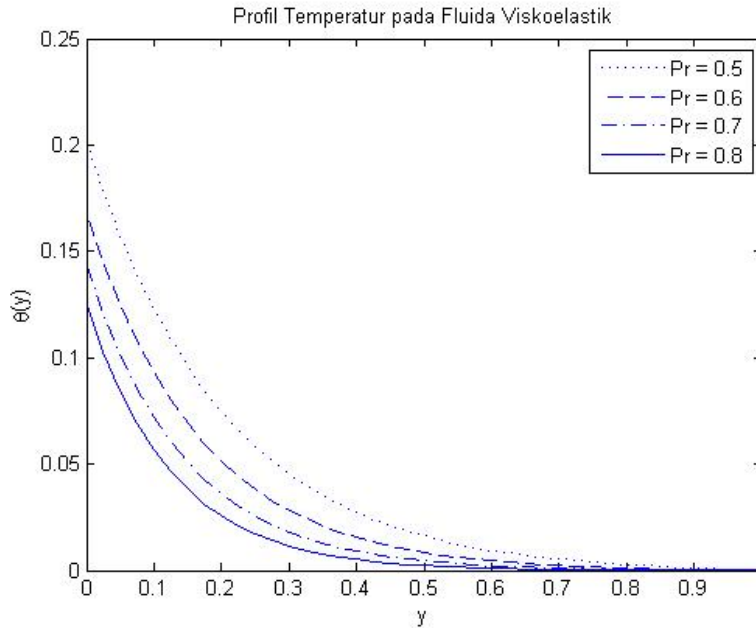
Gambar 5.8 dan 5.9 menggambarkan profil kecepatan dan temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi bilangan Prandtl  $Pr = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$  dan nilai



Gambar 5.7: Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi parameter pembentukan panas ( $\gamma$ )



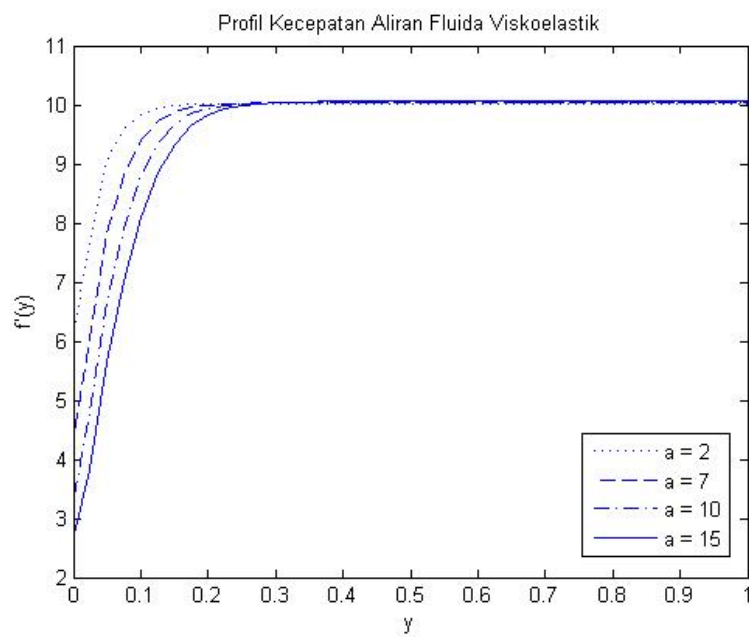
Gambar 5.8: Profil kecepatan pada fluida viskoelastik dengan variasi bilangan Prandtl



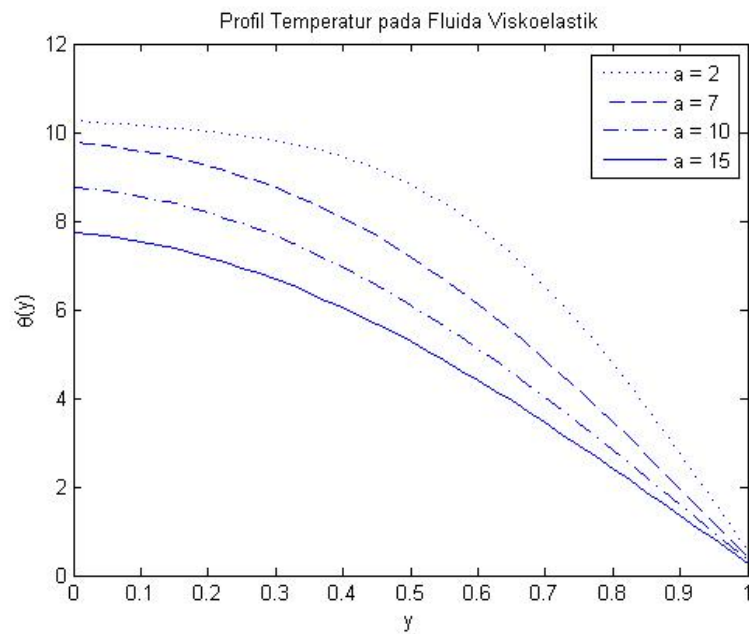
Gambar 5.9: Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi bilangan Prandtl

$\gamma = 1$ ,  $K = 0.5$ ,  $a = 10$ , dan  $b = 5$ . Gambar tersebut menunjukkan bahwa besar kecepatan dan temperatur menurun seiring dengan bertambahnya besar bilangan Prandtl. Pada profil kecepatan, nilai maksimumnya 11, sedangkan temperatur maksimumnya mendekati 0.25. Hal tersebut berdasarkan definisi dari bilangan  $Pr$  yaitu parameter penentu panas yang merupakan perbandingan dari nilai viskositas kinematika dengan diffusivitas panas, sehingga semakin besar  $Pr$ , temperatur dan kecepatan yang dihasilkan semakin kecil. Selain itu, dengan bertambahnya nilai  $Pr$ , densitas yang dihasilkan semakin besar, sehingga mengakibatkan kecepatan dan temperaturnya berkurang. Pada profil kecepatan, nilai kecepatan konstan sebesar 10 pada titik  $\geq 0.3$ . Hal tersebut disebabkan karena adanya pengaruh *heat generation* yang dapat menghambat aliran kecepatan yang semakin menjauh dari *body* silinder.

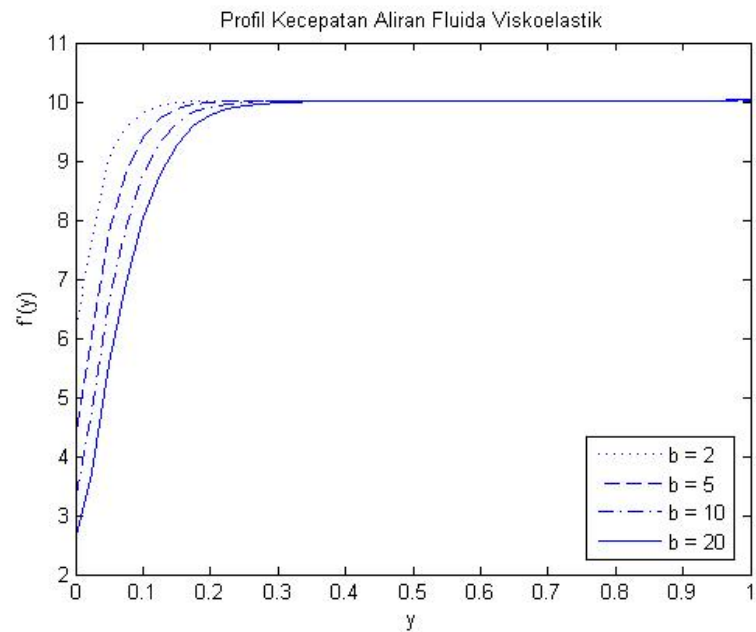
Gambar 5.10 menunjukkan profil kecepatan untuk  $a > b$  pada aliran fluida yang melewati silinder eliptik dengan variasi nilai  $a$ , yaitu  $a = 2, 7, 10, 15$  dan nilai  $Pr = 0.01$ ,  $K = 0.2$ ,  $\gamma = 1$ , dan  $b = 1$ . Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa kecepatan semakin kecil seiring dengan bertambahnya nilai  $a$ . Besar kecepatan maksimum yang dihasilkan adalah 11. Sedangkan Gambar 5.11 menunjukkan tentang profil kecepatan fluida viskoelastik dengan besar kecepatan maksimumnya 12. Hal tersebut disebabkan karena semakin besar luas penampang benda (benda semakin *blunt*), kecepatan dan temperatur yang dihasilkan semakin kecil.



Gambar 5.10: Profil kecepatan pada fluida viskoelastik dengan variasi nilai  $a$

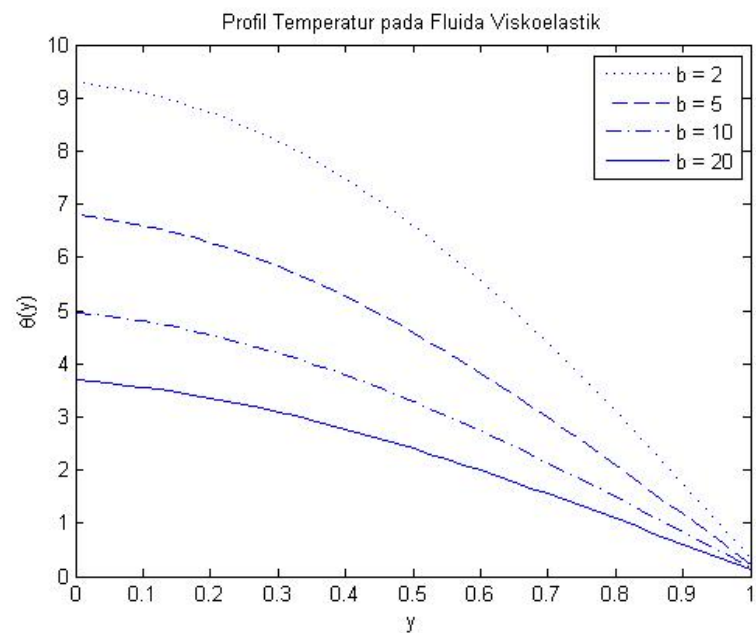


Gambar 5.11: Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai  $a$



Gambar 5.12: Profil kecepatan pada fluida viskoelastik dengan variasi nilai  $b$

Gambar 5.12 dan 5.13 menunjukkan profil kecepatan dan temperatur untuk



Gambar 5.13: Profil temperatur aliran fluida viskoelastik dengan variasi nilai  $b$

$b > a$  pada silinder eliptik dengan variasi nilai  $b$ , yaitu  $b = 2, 5, 10, 20$ . Profil temperatur pada Gambar 5.12 dengan nilai  $Pr = 0.01$ ,  $K = 0.2$ ,  $\gamma = 1$ , dan  $a = 1$  menunjukkan bahwa semakin besar nilai  $b$ , kecepatan yang dihasilkan



semakin kecil. Kecepatan maksimumnya mencapai nilai 11, begitu juga dengan profil temperatur yang ditunjukkan pada Gambar 5.13, semakin besar nilai  $b$ , temperatur yang dihasilkan semakin kecil dengan temperatur maksimum yang dihasilkan adalah 10. Hal tersebut dikarenakan semakin besar luas penampang benda, distribusi temperatur dan kecepatan yang dihasilkan semakin kecil.

## BAB VI

### KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari keseluruhan pembahasan dan analisis yang telah dilakukan sebelumnya dan saran yang dapat diberikan oleh penulis untuk pembaca yang dapat digunakan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

#### 6.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Dalam variasi nilai  $K = 5, 6, 7, 8$  dan menggunakan nilai  $Pr = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $a = 10$ ,  $b = 5$  ditunjukkan bahwa semakin besar nilai  $K$ , distribusi kecepatan yang dihasilkan semakin kecil, sedangkan distribusi temperaturnya meningkat. Hal tersebut dikarenakan timbulnya gaya gesek antara dinding benda dan fluida yang dapat menimbulkan gesekan, sehingga dapat menghambat aliran fluida dan menyebabkan kecepatan semakin kecil. Adanya gesekan tersebut juga dapat menimbulkan panas, sehingga distribusi temperatur yang dihasilkan semakin besar.
2. Dalam variasi nilai  $\gamma = 1, 5, 8, 10$  dan menggunakan nilai  $Pr = 0.5$ ,  $K = 0.2$ ,  $a = 10$ ,  $b = 5$  ditunjukkan bahwa semakin besar nilai  $\gamma$ , distribusi kecepatan dan temperatur yang dihasilkan semakin besar. Hal tersebut disebabkan karena bertambahnya parameter sumber panas, mengakibatkan densitas fluida berkurang sehingga kecepatannya bertambah. Selain itu, juga karena terjadi perpindahan panas pada fluida dan benda yang dapat mengakibatkan penambahan suhu dari parameter sumber panas tersebut, sehingga secara otomatis temperatur yang dihasilkan semakin bertambah seiring dengan bertambahnya nilai  $\gamma$ .
3. Dalam variasi nilai  $Pr = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$  dan menggunakan nilai  $\gamma = 1$ ,  $K = 0.5$ ,  $a = 10$ ,  $b = 5$  ditunjukkan bahwa semakin besar nilai  $Pr$ , distribusi kecepatan dan temperatur yang dihasilkan semakin kecil. Hal tersebut berdasarkan definisi dari bilangan  $Pr$  yaitu parameter penentu panas

yang merupakan perbandingan dari nilai viskositas kinematik dengan difusivitas panas, sehingga semakin besar  $Pr$ , temperatur dan kecepatan yang dihasilkan semakin kecil. Selain itu, dengan bertambahnya nilai  $Pr$ , densitas yang dihasilkan semakin kecil dan mengakibatkan kecepatan dan temperaturnya bertambah.

4. Dalam variasi nilai  $a = 2, 7, 10, 15$  dan variasi nilai  $b = 2, 5, 10, 20$  dengan nilai  $Pr = 0.01$ ,  $K = 0.2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $b = 1$  ditunjukkan bahwa distribusi temperatur dan kecepatan yang dihasilkan semakin kecil. Hal tersebut disebabkan karena semakin besar luas penampang benda, maka distribusi temperatur dan kecepatannya semakin kecil.

## 6.2 Saran

Adapun saran yang diberikan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Metode beda hingga eksplisit lebih tepat digunakan untuk penyelesaian model persamaan 1D.
2. Sebaiknya ditunjukkan distribusi *skin friction* dan temperatur dinding untuk mengetahui profil kecepatan dan temperatur tepat pada permukaan dinding silinder.

## DAFTAR PUSTAKA

- Cheng, C.Y. (2012), "Free Convection Boundary Layer Flow Over a Horizontal Cylinder of Elliptic Cross Section in Porous Media Saturated by a Nanofluid", *International Communications in Heat and Mass Transfer* 39, 1-4:931-936.
- D'Alessio, S.J.D. dan Perera, R.N. (2009), "Unsteady Free Convection From Elliptic Cylinders at Large Grashof Numbers", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52,1-11:5940-5953.
- Ghasemi, E., Soleimani, B., dan Bararnia, H. (2012), "Natural Convection Between a Circular Enclosure and Elliptic Cylinder Using Control Volume Based Finite Element Method", *International Communications in Heat and Mass Transfer* 39,1-2:1035-1044.
- Hoffman, K.A. dan Chiang, S.T. (2000), *Fourth Edition Computational Fluid Dynamics Volume I*, Engineering Education System. USA.
- Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Layer Flow of Viscous Elastic Fluid*, Universiti Technology Malaysia, Malaysia.
- Lienhard, J.H. (2008), *A Heat Transfer Textbook Third Edition*, Phlogiston Press, Cambridge, Massachusetts, USA.
- Long, C. dan Sayma, N. (2009), *Heat Transfer 1st Edition*.
- Marinet, M.F. dan Tardu, S. (2009), *Convective Heat Transfer Solved Problems*, ISTE Ltd, UK.
- Munson, B.R., Young, D.F., dan Okiishi, T.H. (2002), *Fourth Edition Fundamentals of Fluid Mechanics*, Iowa State University, USA.
- Potter, M.C., Wiggert, D.C., dan Ramadan, B.H. (2012), *Mechanics of Fluids Fourth Edition*, Cengage Learning, USA.
- Potter, M.C., Wiggert, D.C., dan Ramadan, B.H. (2008), *Schaum's Outline Mekanika Fluida*, Erlangga, Jakarta.

- Sarif, N.M., Salleh, M.Z., Tahar, R.M., dan Nazar, R. (2013), "Numerical Solution of the Free Convection Boundary Layer Flow over a Horizontal Circular Cylinder with Convective Boundary Conditions", Universiti Malaysia Pahang, Malaysia.
- Sen, M. (1996), *Lecture Notes on Intermediate Fluid Mechanics*, University of Notre Dame.
- Versteg, H.K. dan Malalasekera (1995), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics The Finite Volume Method*, Longman Scientific Technical, England.
- Widodo, B., Fatahillah, A., Rahayuningsih, T., (2011), "Mathematical Modelling and Numerical Solution of Iron Corrosion Problem Based on Condensation Chemical Properties", Australian Journal of Basic and Applied Sciences", 5(1), pp. 79-86.
- Widodo, B., Wen, X., Ingham, D.B, (1997), "The Free Surface Fluid Flow in an Arbitrary Shaped in a Channel", Journal of Engineering Analysis with Boundary Element, Vol. 19, PP.299-308.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1. Perhitungan Komponen Tegangan Geser pada Persamaan Momentum

Berdasarkan Persamaan (5.9) dan (5.10), akan dibuktikan bahwa  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{jj} \right) \right] \\
 &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right] \\
 &= \mu_0 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] - 2k_0 \left[ \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\
 &= \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\
 \\
 \tau_{yx} &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{jj} \right) \right] \\
 &= 2\mu_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} d_{ii} + \frac{\partial u}{\partial x} d_{ij} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial y} d_{ij} + \frac{\partial v}{\partial x} d_{jj} \right) \right] \\
 &= \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ \mathbf{V} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned}$$

**Lampiran 2. Penurunan Persamaan Komponen *Stress Tensor* pada  
Penyelesaian Persamaan Momentum Sumbu  $x$  dan  $y$**

1. Turunan  $\tau_{xx}$  terhadap  $x$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \right) \\
 &= 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y} - \right. \\
 &\quad \left. 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\
 &= 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left( -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y} - \right. \\
 &\quad \left. 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)
 \end{aligned}$$

2. Turunan  $\tau_{xy}$  terhadap  $y$

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right) \\
 &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 2k_0 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
 &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
 &\quad \left. u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \right. \\
 &\quad \left. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\
 &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
 &\quad \left. u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \right.
 \end{aligned}$$



$$2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big]$$

### 3. Turunan $\tau_{xy}$ terhadap $x$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[ \frac{u}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right) \\ &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2k_0 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \frac{1}{2} u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \\ &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \\ &\quad \left. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \\ &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ &\quad u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \\ &\quad \left. 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \\ &= \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[ \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) + \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

4. Turunan  $\tau_{yy}$  terhadap  $y$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right) \\
&= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2k_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\
&= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\
&\quad \left. 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
&= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left[ 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \right. \\
&\quad \left. 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]
\end{aligned}$$

### Lampiran 3. Perhitungan Persamaan Momentum

Berdasarkan Persamaan (5.2) dan (5.3), diperoleh persamaan momentum sebagai berikut:

1. Persamaan momentum pada sumbu- $x$

$$\begin{aligned}
 \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \\
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[ -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
 &\quad \left. 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
 &\quad \left. u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \right. \\
 &\quad \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + F_x \\
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[ -6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \\
 &\quad \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
 &\quad \left. u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + F_x \\
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \\
 &\quad k_0 \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\
 &\quad \left. v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \\
 &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan kontinuitas yang diperoleh sebelumnya, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

maka diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \right. \\ & 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\ & u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \end{aligned}$$

karena

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + F_x \\ = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + F_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\
& k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\
& \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\
& \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + F_x
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\
& \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\
& \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\
& \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{1}{\rho} F_x
\end{aligned}$$

## 2. Persamaan momentum pada sumbu-y

$$\begin{aligned}
\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + F_y \\
= & -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[ \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \right. \right. \\
& \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left. \right) + \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\
& v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \left. \right) + \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \\
& 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \left. \right] + 2 \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left[ 2 u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
& k_0 \left[ 2 u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2 v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \right. \\
& \left. \left. 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right] + F_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \\
&\quad k_0 \left[ \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \left( u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \right. \\
&\quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) - \\
&\quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \\
&\quad 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\
&\quad \left. 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \\
&\quad k_0 \left[ \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&\quad \left( v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \\
&\quad \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\
&\quad \frac{\partial v}{\partial x} \left( \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \\
&\quad k_0 \left[ u \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&\quad v \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \\
&\quad \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\
&\quad \frac{\partial v}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan persamaan kontinuitas, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

didapat persamaan

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \right. \\ & u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial v}{\partial y} \left( 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y \end{aligned}$$

selanjutnya substitusikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ & v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y \\ = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ & v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&\quad \left. v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&\quad \left. v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&\quad \left. v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y
\end{aligned}$$

Maka diperoleh persamaan momentum pada sumbu- $y$  berikut:

$$\begin{aligned}
\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&\quad \left. v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[ u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{\rho} F_y
\end{aligned}$$



#### Lampiran 4. Penyederhanaan Persamaan Momentum dengan Menggunakan Teori Persamaan Lapisan Batas

Persamaan momentum dengan menggunakan konsep lapisan batas diperoleh dari proses penyederhanaan sesuai dengan besarnya permintaan di setiap masing-masing suku dari persamaan momentum. Proses penyederhanaan menggunakan konsep lapisan batas ditunjukkan oleh Ozisik (1985) dan Kasim (2014). Selanjutnya, persamaan momentum dinotasikan ke dalam bentuk atau besaran non-dimensional, yaitu 1 dan  $\Delta$ , dengan 1 menunjukkan kecepatan dominan fluida bergerak dan  $\Delta$  menunjukkan perubahan suatu nilai kecepatan aliran yang sangat kecil. Karena dalam penelitian ini arah aliran lebih dominan ke arah sumbu  $x$ , maka diperoleh pemisalan dari bentuk-bentuk notasi berikut ini:

$$u \sim 1, x \sim 1, v \sim \Delta, y \sim \Delta, \frac{k_0}{\rho} \sim \Delta^2, \frac{\mu_0}{\rho} \sim \Delta^2, g \sim 1$$

Berdasarkan bentuk-bentuk notasi yang dimisalkan di atas, selanjutnya dilakukan proses penyederhanaan persamaan momentum untuk persamaan momentum pada sumbu  $x$  dan  $y$ .

##### 1. Persamaan momentum pada sumbu- $x$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\ & v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x \end{aligned}$$

Karena pemisalan notasi tersebut bertujuan untuk mendapatkan komponen-komponen yang akan diamati dalam analisa berikutnya, maka nilai tekanan ( $P$ ) tidak dinotasikan sebab tekanan merupakan komponen yang penting dan sangat berpengaruh dalam penelitian ini, sehingga pasti digunakan dalam proses analisa pada persamaan momentum. Sesuai dengan bentuk atau besaran non-dimensional yang digunakan dalam pemisalan sebelumnya, maka persamaan momentum pada sumbu  $x$  dapat dinyatakan dalam notasi

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 \frac{1}{1} \quad \Delta \frac{1}{\Delta} &= \Delta^2 \left[ \frac{1}{1} \quad \frac{1}{\Delta^2} \right] \quad \Delta^2 \left[ 1 \left( \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1\Delta^2} \right) \right. \\ &\quad \Delta \left( \frac{1}{1\Delta} \quad \frac{1}{\Delta^3} \right) \quad \frac{1}{\Delta} \left( \frac{1}{\Delta 1} \quad \frac{\Delta^2}{1} \right) \quad \frac{\Delta}{1} \frac{1}{1\Delta} \\ &\quad \left. \frac{1}{1} \left( \frac{1}{1} \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \right] \quad 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan operasi perkalian untuk mendapatkan nilai tiap suku dari persamaan momentum. Misalkan pada ruas kiri:

$$1 \frac{1}{1} = 1, \quad \Delta \frac{1}{\Delta} = 1$$

Dengan cara yang sama dengan perolehan nilai tiap suku di ruas kiri, maka diperoleh nilai tiap suku dari persamaan momentum berikut ini:

$$\begin{aligned} 1 \quad 1 &= \Delta^2 \left[ 1 \quad \frac{1}{\Delta^2} \right] \quad \Delta^2 \left[ \left( 1 \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \right. \\ &\quad \left( 1 \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \quad \left( \frac{1}{\Delta^2} \quad \frac{\Delta}{1} \right) \quad 1 \quad 1 \\ &\quad \left. \left( 1 \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \right] \quad 1 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned} 1 \quad 1 &= \left[ \Delta^2 \quad 1 \right] \quad \left[ \left( \Delta^2 \quad 1 \right) \right. \\ &\quad \left( \Delta^2 \quad 1 \right) \quad \left( 1 \quad \Delta^3 \right) \quad \Delta^2 \\ &\quad \left. \left( \Delta^2 \quad 1 \right) \right] \quad 1 \end{aligned}$$

Karena dalam bentuk non-dimensional kecepatan dominan fluida bergerak dinotasikan dengan 1, maka didapatkan persamaan momentum pada sumbu  $x$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x \end{aligned}$$

## 2. Persamaan momentum pada sumbu- $y$

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
 & v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\
 & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - g_y
 \end{aligned}$$

Sama halnya pada persamaan momentum sumbu  $x$ , yaitu dengan menggunakan bentuk atau besaran non-dimensional yang digunakan dalam pemisalan notasi sebelumnya, diperoleh bentuk notasi untuk persamaan momentum pada sumbu  $y$  berikut ini:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1} \frac{\Delta}{\Delta} = & \Delta^2 \left( \frac{\Delta^2}{1} \quad \frac{\Delta^2}{\Delta^2} \right) \quad \Delta^2 \left[ 1 \left( \frac{\Delta^3}{1} \quad \frac{\Delta^3}{1 \Delta^2} \right) \right. \\
 & \Delta \left( \frac{\Delta^3}{1 \Delta} \quad \frac{\Delta^3}{\Delta^3} \right) \quad \frac{1}{1} \left( \frac{\Delta^2}{\Delta^2} \quad \frac{\Delta^2}{1} \right) \\
 & \left. \frac{\Delta}{1} \left( \frac{\Delta^2}{1 \Delta} \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \quad \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta^2}{1 \Delta} \right] \quad 1
 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis dengan:

$$\begin{aligned}
 \Delta \quad \Delta = & \left( \Delta^4 \quad \Delta^2 \right) \quad \left[ \left( \Delta^5 \quad \Delta^3 \right) \right. \\
 & \left( \Delta^5 \quad \Delta^3 \right) \quad \left( \Delta^2 \quad \Delta^4 \right) \\
 & \left. \left( \Delta^4 \quad \Delta \right) \quad \Delta^2 \right] \quad 1
 \end{aligned}$$

Hasil yang diperoleh hanya memuat nilai  $\Delta$ , yaitu menunjukkan bahwa persamaan momentum pada sumbu  $y$  mengalami perubahan nilai kecepatan sangat kecil. Sehingga, pada analisa berikutnya persamaan momentum pada sumbu  $y$  tidak digunakan.

## Lampiran 5. Transformasi Persamaan Pembangun ke Persamaan Non-dimensional

Berdasarkan persamaan non-dimensional pada Persamaan (5.33) sampai (5.35) dan sesuai dengan kondisi batas pada Persamaan (5.36) dilakukan transformasi ke persamaan non-dimensional dengan variabel non-dimensional berikut ini:

$$v = \frac{a}{\nu} Gr^{-1/4} \bar{v}, \quad \theta = \bar{T} - \bar{T}_\infty / q_w a / k$$

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = Gr^{1/4} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right), \quad u = \frac{a}{\nu} Gr^{-1/2} \bar{u}$$

atau dapat ditulis

$$\bar{x} = xa, \quad \bar{y} = \frac{ya}{Gr^{1/4}}, \quad \bar{T} - \bar{T}_\infty = \frac{\theta q_w a}{k} \bar{u} = \frac{u\nu}{aGr^{1/4}} \quad \bar{v} = \frac{v\nu}{aGr^{-1/4}}$$

Berikut perhitungan persamaan non-dimensional.

### 1. Persamaan kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial (xa)} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \left( \frac{ya}{Gr^{1/4}} \right)} \left( \frac{v\nu}{aGr^{-1/4}} \right) &= 0 \\ \frac{\nu}{a^2 Gr^{-1/2}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Gr^{1/4} \nu}{a^2 Gr^{-1/4}} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\nu}{a^2 Gr^{-1/2}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a^2 Gr^{-1/2}} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\nu}{a^2 Gr^{-1/2}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan kontinuitas non-dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

## 2. Persamaan momentum

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \nu \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + g\beta(\bar{T} - \bar{T}_\infty) \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) \right]$$

**Ruas kiri:**

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \frac{\partial}{\partial(xa)} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) + \\ &\quad \left( \frac{v\nu}{aGr^{-1/4}} \right) \frac{\partial}{\partial\left(\frac{ya}{Gr^{1/4}}\right)} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \\ &= \left( \frac{\nu}{aGr^{-1/4}} \right) \left( \frac{\nu}{aGr^{-1/4}} \right) \frac{1}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &\quad \left( \frac{\nu}{aGr^{-1/4}} \right) \left( \frac{\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \frac{Gr^{1/4}}{a} v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \left( \frac{\nu^2}{a^3 Gr^{-1}} \right) u \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\nu^2}{a^3 Gr^{-1}} \right) v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\nu^2}{a^3 Gr^{-1}} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

**Ruas kanan:**

$$\begin{aligned} &= \nu \frac{\partial^2}{\partial\left(\frac{ya}{Gr^{1/4}}\right)^2} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) + g\beta \left( \frac{\theta q_w a}{k} \right) \sin x - \\ &\quad \frac{k_0}{\rho} \left[ \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \frac{\partial^3}{\partial(xa) \partial\left(\frac{ya}{Gr^{1/4}}\right)^2} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) + \right. \\ &\quad \left( \frac{v\nu}{aGr^{-1/4}} \right) \frac{\partial^3}{\partial\left(\frac{ya}{Gr^{1/4}}\right)^3} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial\left(\frac{ya}{Gr^{1/4}}\right)} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \frac{\partial^2}{\partial(xa) \partial\left(\frac{ya}{Gr^{1/4}}\right)} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) + \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial(xa)} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \frac{\partial^2}{\partial\left(\frac{ya}{Gr^{1/4}}\right)^2} \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^3 Gr^{-1/2}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta \left( \frac{\theta q_w a}{k} \right) \sin x - \\
&\quad \frac{k_0}{\rho} \left[ \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^5 Gr^{-1}} \right) u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^5 Gr^{-1}} \right) v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^5 Gr^{-1}} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^5 Gr^{-1}} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\
&= \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^3 Gr^{-1/2}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta \left( \frac{\theta q_w a}{k} \right) \sin x - \\
&\quad \frac{k_0}{\rho} \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^5 Gr^{-1}} \right) \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{\nu^2}{a^3 Gr^{-1}} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^3 Gr^{-1/2}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta \left( \frac{\theta q_w a}{k} \right) \sin x - \\
&\quad \frac{k_0}{\rho} \left( \frac{\nu^2 Gr^{1/2}}{a^5 Gr^{-1}} \right) \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]
\end{aligned}$$

dengan membagi kedua ruas dengan  $\frac{\nu^2}{a^3 Gr^{-1}}$ , maka diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{g\beta q_w a}{k} \cdot \frac{a^3 Gr^{-1}}{\nu^2} \theta \sin x - \\
&\quad \frac{k_0}{\rho} \left( \frac{Gr^{1/2}}{a^2} \right) \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]
\end{aligned}$$

dengan  $Gr = g\beta(aq_w/k)a^3/\nu^2$ , sehingga didapat persamaan momentum non-dimensional sebagai berikut:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \theta \sin x$$

dengan

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad K = \frac{k_0 Gr^{1/2}}{\rho a^2}, \quad \gamma = \frac{a^2 Q_0}{\nu \rho C_p Gr^{1/2}}$$

### 3. Persamaan energi

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p} (\bar{T} - \bar{T}_\infty)$$

Berdasarkan variabel non-dimensional yang telah ditentukan, maka perhitungan persamaan energi dalam bentuk non-dimensional adalah sebagai berikut:

**Ruas kiri:**

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \frac{\partial}{\partial(xa)} \left( \frac{\theta q_w a}{k} - \bar{T}_\infty \right) + \\ &\quad \left( \frac{v\nu}{aGr^{-1/4}} \right) \frac{\partial}{\partial \left( \frac{ya}{Gr^{1/4}} \right)} \left( \frac{\theta q_w a}{k} - \bar{T}_\infty \right) \\ &= \left( \frac{u\nu}{aGr^{-1/2}} \right) \left( \frac{q_w a}{ka} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left( \frac{v\nu}{aGr^{-1/4}} \right) \left( \frac{q_w a Gr^{1/4}}{aka} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \left( \frac{\nu q_w}{akGr^{-1/2}} \right) u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left( \frac{\nu q_w}{akGr^{-1/2}} \right) v \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \left( \frac{\nu q_w}{akGr^{-1/2}} \right) \left( u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

**Ruas kanan:**

$$\begin{aligned} &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial \left( \frac{ya}{Gr^{1/4}} \right)^2} \left( \frac{\theta q_w a}{k} - \bar{T}_\infty \right) + \frac{Q_0}{\rho C_p} \left( \frac{\theta q_w a}{k} \right) \\ &= \left( \frac{\alpha q_w a Gr^{1/2}}{a^2 k} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p} \frac{\theta q_w a}{k} \end{aligned}$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka didapat persamaan berikut:

$$\left( \frac{\nu q_w}{akGr^{-1/2}} \right) \left( u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \left( \frac{\alpha q_w a Gr^{1/2}}{a^2 k} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p} \frac{\theta q_w a}{k}$$

Bagi kedua ruas dengan  $\left(\frac{\nu q_w}{akGr^{-1/2}}\right)$ , sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \left(\frac{\alpha q_w a Gr^{1/2}}{a^2 k}\right) \left(\frac{a Gr^{-1/2} k}{\nu q_w}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p} \frac{\theta q_w a}{k} \left(\frac{a Gr^{-1/2} k}{\nu q_w}\right) \\ &= \frac{\alpha}{\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{a^2 Q_0}{\nu \rho C_p Gr^{1/2}} \theta \end{aligned}$$

dengan  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  dan  $\gamma = \frac{a^2 Q_0}{\nu \rho C_p Gr^{1/2}}$ , diperoleh persamaan momentum non-dimensional sebagai berikut:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta$$



## Lampiran 6. Perhitungan Persamaan Similaritas

Berdasarkan persamaan non-dimensional, yaitu pada Persamaan (5.38) sampai (5.40) dilakukan transformasi ke bentuk persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi aliran. Variabel dari fungsi aliran adalah sebagai berikut:

$$\psi = xf(x, y), \quad \theta = \theta(x, y),$$

dengan  $\psi$  adalah fungsi aliran yang didefinisikan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

sehingga diperoleh persamaan berikut:

### 1. Persamaan kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan kontinuitas yang dihasilkan bernilai nol, sehingga pada persamaan similaritas ini, persamaan kontinuitas dapat diabaikan.

### 2. Persamaan momentum

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \theta \sin x \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \\ &\quad K \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right) \right) + \\ &\quad \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) + \\ &\quad \theta \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= x \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, & \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= f + x \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

maka didapat

$$\begin{aligned}x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \\ &K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \right. \\ &\left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \\ &\left. \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) \right] + \\ &\theta \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + x^2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) - \right. \\ &\left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( x \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) - \\ &\left. \left( x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \left( x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right] + \\ &\theta \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \left( \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - \left( f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right) + x^2 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) &= x \left( \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - K \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \right. \right. \\ &\left. f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \right) - \\ &K x^2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \right. \\ &\left. \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \right. \\ &\left. \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] + \theta \sin x\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$x \left( \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - K \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \right) +$$

$$x^2 \left( - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - K \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] \right) = 0$$

selanjutnya dilakukan pembagian terhadap  $x$ , sehingga didapat:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - K \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] +$$

$$x \left( - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - K \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] \right) = 0$$

Pada titik stagnasi bagian terdekat dengan *blunt body*, yaitu  $x \approx 0$ , diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$f''' + f f'' - (f')^2 + \theta - K(2f' f''' - f f^{(4)} - (f'')^2) = 0$$

### 3. Persamaan energi

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta$$

$$\left( x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \left( \left( f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - f \frac{\partial \theta}{\partial y} - x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta$$

$$x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - f \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta$$

dapat ditulis

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y} + \gamma \theta - x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0$$

Pada titik stagnasi bagian terdekat dengan *blunt body*, didapatkan persamaan energi sebagai berikut:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y} + \gamma \theta = 0$$

atau

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' + \gamma \theta = 0$$

## Lampiran 7. Program Matlab

```
clc;clear all;close all;  
%%Prandtl numbers  
Prandtl(1) = 0.1;  
Prandtl(2) = 0.2;  
Prandtl(3) = 0.3;  
Prandtl(4) = 0.4;  
  
%%Viscouelastic value  
Viscoelastic(1) = 5;  
Viscoelastic(2) = 6;  
Viscoelastic(3) = 7;  
Viscoelastic(4) = 8;  
  
%%Heat generation  
Gamma(1) = 1;  
Gamma(2) = 5;  
Gamma(3) = 8;  
Gamma(4) = 10;  
  
%%a value  
alpha(1) = 10;  
alpha(2) = 11;  
alpha(3) = 12;  
alpha(4) = 13;  
  
%%b value  
beta(1) = 3;  
beta(2) = 3.5;  
beta(3) = 4;  
beta(4) = 4.5;  
  
%%length  
delta_y=0.025;  
y=0:delta_y:1;  
M=length(y);
```

```

%%Initial condition
for i=1:M
    teta(i)=10;
    f(i)=10;
    p(i)=10;
end

disp('1. Gamma (fixed), Pr (fixed), K(various), A(
    fixed), B(fixed)');
disp('2. Gamma (various), Pr (fixed), K(fixed), A(
    fixed), B(fixed)');
disp('3. Gamma (fixed), Pr (various), K(fixed), A(
    fixed), B(fixed)');
disp('4. Gamma (fixed), Pr (fixed), K(fixed), A(
    various), B(fixed)');
disp('5. Gamma (fixed), Pr (fixed), K(fixed), A(fixed)
    , B(various)');
pilih = input('pilih (1,2,3,4 or 5) = ');
for it = 1:4
    if(pilih==1)
        Pr=1;
        K=Viscoelastic(it);
        gama=1;
        a=10;
        b=5;
    elseif(pilih==2)
        Pr=0.5;
        K=0.2;
        gama=Gamma(it);
        a=10;
        b=5;
    elseif(pilih==3)
        Pr=Prandtl(it);
        K=0.5;
        gama=0.5;

```

```

        a=10;
        b=5;
    elseif ( pilih ==4)
        Pr=0.01;
        K=0.2;
        gama=0.5;
        a=alpha ( it );
        b=1;
    elseif ( pilih ==5)
        Pr=0.01;
        K=0.2;
        gama=1;
        a=1;
        b=beta ( it );
    else
        return ;
    end;

for i=1:M
    if i==1
        p(i)=(f(i+1)-f(i+1))/(2*delta_y);
    elseif (i==M)
        p(i)=(f(i-1)-f(i-1))/(2*delta_y);
    else
        p(i)=(f(i+1)-f(i-1))/(2*delta_y);
    end
end

S = 1;
sinA = (b/a)*S;
A=1/(delta_y ^2);
B=0.5-(2.5*K*A);
C=-0.5-(1.5*K*A);
D=K*A;
E=1-(4*K*A);
r1=1/(Pr*delta_y ^2);
r2=1/(2*delta_y);

```

```

for it_max = 1:40
for i=1:M
    %% Momentum
    if i==1
        p(i)=sqrt(((A*p(i+1))+((-2*A)*p(i)))+(A*p(i
            +1)))+(B*p(i)*p(i+1)))+(C*p(i)*p(i+1)))+(
            teta(i)*sinA)+(0.5*D*p(i)*p(i+2))-(0.5*D
            *p(i)*p(i)))+(0.25*D*p(i+1)*p(i+1))-(0.5*
            D*p(i+1)*p(i+1)))+(0.25*D*p(i+1)*p(i+1)))
            /E);
    elseif (i==2)
        p(i)=sqrt(((A*p(i+1))+((-2*A)*p(i)))+(A*p(i
            -1)))+(B*p(i)*p(i+1)))+(C*p(i)*p(i-1)))+(
            teta(i)*sinA)+(0.5*D*p(i)*p(i+2))-(0.5*D
            *p(i)*p(i)))+(0.25*D*p(i+1)*p(i+1))-(0.5*
            D*p(i+1)*p(i-1)))+(0.25*D*p(i-1)*p(i-1)))
            /E);
    elseif (i==M-1)
        p(i)=sqrt(((A*p(i+1))+((-2*A)*p(i)))+(A*p(i
            -1)))+(B*p(i)*p(i+1)))+(C*p(i)*p(i-1)))+(
            teta(i)*sinA)+(0.5*D*p(i)*p(i))-(0.5*D*p
            (i)*p(i-2)))+(0.25*D*p(i+1)*p(i+1))-(0.5*
            D*p(i+1)*p(i-1)))+(0.25*D*p(i-1)*p(i-1)))
            /E);
    elseif (i==M)
        p(i)=sqrt(((A*p(i-1))+((-2*A)*p(i)))+(A*p(i
            -1)))+(B*p(i)*p(i-1)))+(C*p(i)*p(i-1)))+(
            teta(i)*sinA)+(0.5*D*p(i)*p(i))-(0.5*D*p
            (i)*p(i-2)))+(0.25*D*p(i-1)*p(i-1))-(0.5*
            D*p(i-1)*p(i-1)))+(0.25*D*p(i-1)*p(i-1)))
            /E);
    else
        p(i)=sqrt(((A*p(i+1))+((-2*A)*p(i)))+(A*p(i
            -1)))+(B*p(i)*p(i+1)))+(C*p(i)*p(i-1)))+(
            teta(i)*sinA)+(0.5*D*p(i)*p(i+2))-(0.5*D
            *p(i)*p(i-2)))+(0.25*D*p(i+1)*p(i+1))

```



```

        -(0.5*D*p(i+1)*p(i-1))+(0.25*D*p(i-1)*p(
        i-1)))/E);
    end

%% Energy
    if i==1
        teta(i)=(((r1+(r2*f(i)))*teta(i+1))+((r1-(
        r2*f(i)))*(teta(i+1)+(2*delta_y))))/((2*
        r1)-gama);
    elseif (i==M)
        teta(i)=((((r1+(r2*f(i)))*(teta(i-1)-(2*
        delta_y)))+(r1-(r2*f(i))*teta(i-1))))
        /((2*r1)-gama);
    else
        teta(i)=((((r1+(r2*f(i)))*teta(i+1))+((r1-(
        r2*f(i)))*teta(i-1))))/((2*r1)-gama);
    end;
end
end
%%Wall Temperature
teta_w(it)=teta(it+1)+(2*delta_y);

if(it==1)
    figure(1);
    plot(y,teta,'r:','LineWidth',2.5);
    title('Profil Temperatur pada Fluida
        Viskoelastik');
    ylabel('\theta(y)');
    xlabel('y');
    hold on;
    figure(2);
    plot(y,p,'r:','LineWidth',2.5);
    title('Profil Laju pada Fluida Viskoelastik');
    ylabel('f''(y)');
    xlabel('y');
    hold on;

```

```

elseif ( it == 2)
    figure(1);
    plot(y, teta, 'g—', 'LineWidth', 2.5);
    title('Profil Temperatur pada Fluida
          Viskoelastik');
    ylabel('\theta(y)');
    xlabel('y');
    hold on;
    figure(2);
    plot(y, p, 'g—', 'LineWidth', 2.5);
    title('Profil Laju pada Fluida Viskoelastik');
    ylabel('f''(y)');
    xlabel('y');
    hold on;

elseif ( it == 3)
    figure(1);
    plot(y, teta, 'm-.', 'LineWidth', 2.5);
    title('Profil Temperatur pada Fluida
          Viskoelastik');
    ylabel('\theta(y)');
    xlabel('y');
    hold on;
    figure(2);
    plot(y, p, 'm-.', 'LineWidth', 2.5);
    title('Profil Kecepatan Aliran Fluida
          Viskoelastik');
    ylabel('f''(y)');
    xlabel('y');
    hold on;

else
    figure(1);
    plot(y, teta, 'blue', 'Linewidth', 2.5);

```

```

        title('Temperature Profiles with the Variation
              of Viscosity Variable');
        ylabel('\theta(y)');
        xlabel('y');
        hold on;
        legend('K= 5','K = 6','K = 7','K = 8');
        figure(2);
        plot(y,p,'blue','Linewidth',2.5);
        title('Velocity Profiles with the Variation of
              Heat Generation Parameter');
        ylabel('f''(y)');
        xlabel('y');
        hold on;
        legend('K= 5','K = 6','K = 7','K = 8');

    end;
end;
teta_w

```

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Annisa Dwi Sulistyningtyas, dilahirkan pada 17 Mei 1991 di Mojokerto dan merupakan anak kedua dari empat bersaudara pasangan bapak Soelistyo Pribadi dan Ibu Indra Dwi Muhardini. Pendidikan formal yang ditempuh mulai dari SD Negeri Wates 5 Mojokerto, lulus pada tahun 2003 dan melanjutkan pendidikan ke SMP Negeri 1 Mojokerto, lulus pada tahun 2006, kemudian melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 1 Puri Mojokerto, lulus pada tahun 2009.

Pada tahun 2009, penulis melanjutkan pendidikan S1 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember melalui jalur tes tulis SNMPTN, lulus pada tahun 2013 dan melanjutkan pendidikan S2 dengan beasiswa Freshgraduate ITS dengan jurusan dan universitas yang sama dan lulus pada tahun 2015. Pada saat pendidikan S2, penulis mengambil bidang minat Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem. Adapun judul penelitian penulis pada jenjang S1 yaitu Distribusi Air Bersih Pada Sistem Perpipaan di Suatu Kawasan Perumahan. Informasi, kritik, dan saran yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail: [annisadwistyas@gmail.com](mailto:annisadwistyas@gmail.com).